IDENTIFICAÇÃO DO MODELO E ANÁLISE DE SISTEMAS DE CONTROLE PARA COMPENSAÇÃO DOS ERROS DE POSICIONAMENTO NAS MÁQUINAS-FERRAMENTA

JOSÉ FÁBIO DE LIMA NASCIMENTO

Editora Poisson

José Fábio de Lima Nascimento

Identificação do modelo e análise de sistemas de controle para compensação dos erros de posicionamento nas máquinas-ferramenta

1ª Edição

Belo Horizonte

Editora Poisson

2024

Editor Chefe: Dr. Darly Fernando Andrade

Conselho Editorial

Dr. Antônio Artur de Souza – Universidade Federal de Minas Gerais
MSc. Davilson Eduardo Andrade
Dra. Elizângela de Jesus Oliveira – Universidade Federal do Amazonas
MSc. Fabiane dos Santos
Dr. José Eduardo Ferreira Lopes – Universidade Federal de Uberlândia
Dr. Otaviano Francisco Neves – Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais
Dr. Luiz Cláudio de Lima – Universidade FUMEC
Dr. Nelson Ferreira Filho – Faculdades Kennedy
MSc. Valdiney Alves de Oliveira – Universidade Federal de Uberlândia

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

N244 NASCIMENTO, José Fábio de Lima

Identificação do modelo e análise de sistemas de controle para compensação dos erros de posicionamento nas máquinas-ferramenta/ José Fábio de Lima Nascimento
Belo Horizonte-MG: Editora Poisson, 2024

Formato: PDF
ISBN: 978-65-5866-393-5
DOI: 10.36229/978-65-5866-393-5

Modo de acesso: World Wide Web
Inclui bibliografia

1. Engenharia 2. Máquinas-ferramenta
I. NASCIMENTO, José Fábio de Lima II.Título

CDD-620

Sônia Márcia Soares de Moura – CRB 6/1896

O conteúdo deste livro está licenciado sob a Licença de Atribuição Creative Commons 4.0.
Com ela é permitido compartilhar o livro, devendo ser dado o devido crédito, não podendo ser utilizado para fins comerciais e nem ser alterada.

O conteúdo dos artigos e seus dados em sua forma, correção e confiabilidade são de responsabilidade exclusiva dos seus respectivos autores.

Esse e outros títulos podem ser baixados gratuitamente em www.poisson.com.br
Entre em contato pelo contato@poisson.com.br

Autor

José Fábio de Lima Nascimento

Graduado em Engenharia Mecânica pela Universidade Federal da Paraíba (2001), Especialização em Dinâmica e Controle de Sistemas Robóticos pela Universidade Federal do Amazonas (2007), Mestrado em Engenharia Mecânica pela Universidade Federal da Paraíba (2004). Atualmente é aluno do Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Recursos Naturais da Amazônia (PRODERNA) do Instituto de Tecnologia da UFPA (ITEC/UFPA), em nível de Doutorado, Professor do Ensino Básico, Técnico e Tecnológico (EBTT) do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Amazonas e Diretor Administrativo e Financeiro do Polo de Inovação de Manaus / IFAM. Tem experiência na área de engenharia mecânica, com ênfase em controle de sistemas mecânicos, atuando principalmente nos seguintes temas: Automação, robótica industrial, modelagem dinâmica de sistemas mecânicos, síntese e aplicação de semicondutores inorgânicos, principalmente, no desenvolvimento de estudos que envolvem as técnicas de caracterizações: Difração de raios X (DRX), refinamento Rietveld, espectroscopia vibracional Raman e no infravermelho, espectroscopia UV-vis de sólidos, microscopia eletrônica de varredura (MEV), termogravimetria (TGA) e calorimetria exploratória diferencial (DSC). Tem estudado ao longo dos últimos anos, as propriedades morfológicas, estruturais e ópticas de materiais obtidos pelo método de moagem de alta energia, investigando propriedades de interesse em aplicações no campo de fotocatálise, obtenção de biocombustíveis, armazenamento de energia (baterias de estado sólido), semicondutores e sensores.

Este trabalho é dedicado aos amigos e colegas que sempre apoiaram, incentivaram e de alguma forma contribuíram para a elaboração deste. Em particular aos meus pais, Arlindo (in memoriam) e Gilda, padrasto, Josenildo, esposa, Tacilla, filhos, Nivaldo Neto, Vinícius, Yasmim e Pierre, e irmãos, Franklin e Gessyca.

Agradecimentos

A Deus, por ter me dado saúde e disposição, e ter colocado em minha vida amigos e colegas que, direta ou indiretamente, contribuíram para a elaboração deste trabalho.

Aos Professores José Felício da Silva e João Bosco de Aquino Silva, pela amizade, orientação e confiança em mim depositada no decorrer deste trabalho.

Aos meus pais, pelo exemplo de honestidade e coragem, e pelo apoio em todos os momentos da minha vida.

A minha esposa, pelo companheirismo e dedicação, e pelo apoio, solidariedade e estímulo durante a elaboração dessa obra.

Aos colegas do LABMEC / UFPB, NEUROLAB / UFPB e Polo de Inovação Manaus / IFAM, pela amizade, colaborações e momentos de descontração que foram essenciais para elaboração deste trabalho.

Aos demais, professores e funcionários da UFPB e IFAM, que, de alguma forma, contribuíram para a elevação de meu conhecimento, neste período de solidificação no período das pesquisas preliminares para elaboração desta obra.

SUMÁRIO

1. Introdução 10

1.1. Organização do trabalho 14

2. Modelagem de um eixo de uma mesa XY 15

2.1. Introdução 15

2.2. Definições e considerações simplificadoras 15

2.2.1. Tipos de modelos 16

2.2.2. Métodos para obtenção das equações de um modelo 17

2.2.3. Etapas para obtenção de um modelo dinâmico 17

2.3. Descrição de um dos eixos da mesa X-Y 18

2.4. Modelagem dinâmica pelo método analítico de um motor de corrente contínua controlado pela armadura 19

2.5. Modelagem dinâmica pelo método analítico de um dos Eixos da mesa XY 21

2.5.1. Equações do sistema 22

2.5.2. Modelagem dinâmica e cinemática do fuso 24

2.6. Determinação da função de transferência do sistema 25

2.6.1. Diagrama de blocos 25

2.6.2. Procedimento para construção de um diagrama de blocos 26

2.6.3. Redução de diagrama de bloco 28

2.7. Modelo matemático no espaço de estados 29

2.8. Análise da planta do sistema 31

2.9. Conclusão 33

3. Projeto de controladores 34

3.1. Introdução 34

3.2. Especificações de desempenho do sistema 35

3.3. Controlador proporcional 36

3.4. Controlador proporcional-derivativo 42

3.5. Controlador proporcional-integral 47

3.6. Controlador proporcional-integral-derivativo 52

3.7. Projeto de um controlador via imposição de pólos 58

3.7.1. Controlabilidade 61

SUMÁRIO

3.7.2. Etapas do projeto de um controlador via imposição de pólos 61

3.7.3. Projeto de um controlador via imposição de pólos para o sistema da mesa XY 62

3.8. CONCLUSÃO 63

4. Estimação de parâmetros de um eixo da mesa XY 66

4.1. Introdução 66

4.2. Estimação por mínimos quadrados 66

4.3. Estimação por mínimos quadrados recursivo 67

4.4. Modernização do eixo da mesa posicionadora 70

4.4.1. *Retrofitting* (Readequação) em máquinas-ferramenta 70

4.4.2. Sistemas de medidas de posição 71

4.4.3. Sistema interpolador 74

4.5. Estimação de parâmetros da bancada experimental 75

4.5.1. Validação do modelo 81

4.6. Conclusão 82

5. Conclusões finais 83

Referências bibliográficas 85

Apêndice 87

Lista de Figuras 90

Lista de Tabelas 92

Lista de Símbolos 93

Resumo: Os erros de posicionamento em máquinas-ferramenta representam uma considerável parcela do erro total nos processos de usinagem. Requisita-se, desta forma, pesquisas e desenvolvimento de técnicas de compensação para minimização dos efeitos negativos de tais erros, os quais comprometem a exatidão e consequentemente a qualidade dimensional das peças fabricadas. Neste trabalho, é modelado um sistema de quinta ordem que representa um dos eixos das mesas de posicionamento das máquinas-ferramenta e utilizam-se as técnicas de controle clássico para projetar controladores com objetivo de minimizar esses erros e elevar o desempenho das máquinas-ferramenta. Com a finalidade de realizar um estudo de aplicabilidade e desempenho de controladores, tomando-se por base o critério de estabilidade de *Routh*, são projetados e simulados controladores do tipo proporcional, proporcional-derivativo, proporcional-integral e proporcional-integral-derivativo. Concluído os projetos, apresentam-se os resultados das simulações adquiridos na aplicação de cada controlador projetado, comparam-se os resultados obtidos e apresentam-se as conclusões. Devido ao fato de alguns sistemas de posicionamento não fornecerem todos os parâmetros necessários para obtenção do modelo, através do equacionamento proposto neste trabalho, apresenta-se um algoritmo com base na técnica de estimação dos mínimos quadrados recursivo para determinação dos valores desconhecidos dos parâmetros do sistema. Com o objetivo de avaliar o desempenho deste algoritmo são realizados ensaios experimentais. Para tanto, é feito um *retrofitting* (readequação) em um dos eixos de uma mesa posicionadora de uma máquina de eletroerosão convencional, adicionando-se a esta um motor de corrente contínua controlado pela armadura com a função de atuador, uma escala óptica com objetivo de medir a posição axial do eixo e um programa computacional interpolador para acionar o motor, adquirir e armazenar os dados de entrada e saída do sistema. Resultando em um sistema de posicionamento comandado pelo computador, o qual, partiu-se do pressuposto, que não se conhece nenhum parâmetro elétrico ou mecânico do sistema. Baseado no modelo dinâmico de quinta ordem, que representa o eixo da mesa XY, a técnica dos mínimos quadrados recursivo é aplicada, resultando em um modelo, que, após a realização de ajuste e validação, representa bem o sistema do eixo da mesa XY da máquina de eletro-erosão juntamente com o sistema de acionamento e de medição, adicionados à máquina durante o processo de *retrofitting.*

Palavras-chave: Máquinas-Ferramenta, Identificação de Sistemas, Compensação de Erros.

CAPÍTULO

01 Introdução

A primeira grande inovação tecnológica referente às máquinas-ferramenta ocorreu na Inglaterra durante a Revolução Industrial com o estabelecimento do princípio de reproduzir[1] que, em conjunto com a revolução da potência, transformou-se na base das máquinas-ferramenta modernas (WADA, 1997).

Devido às mudanças ocorridas nas formas de produção, empregadas por novos sistemas de manufatura e conceito de eficiência, as máquinas-ferramenta, no ponto de vista de suas funções e formato, começaram como sendo máquinas de função única e de aplicação dedicada, usadas exclusivamente para usinar cilindros de motores a vapor, e então progrediram para máquinas de função única e de aplicação geral, tais como fresadoras, furadeiras e mandriladoras, e, depois, para máquinas multifuncionais e de aplicação geral, onde neste grupo incluem-se os centros de usinagem. Olhando para a história das máquinas-ferramenta modernas sob o enfoque da potência de acionamento, verifica-se que a primeira fonte de acionamento para máquinas foi à roda d'água, a qual, posteriormente foi substituída por um acionamento centralizado através de um motor a vapor e em seguida por um acionamento centralizado através de um motor elétrico, um acionamento hidráulico e, finalmente, pelo atual acionamento com motor independente.

A segunda grande inovação tecnológica nas máquinas-ferramenta foi à invenção do controle numérico (CN), no final dos anos 40, nos EUA, a qual aprofundou rapidamente a relação entre as máquinas-ferramenta e a eletrônica. As máquinas-ferramenta foram projetadas originalmente para usinar peças, dando a elas superfícies cilíndricas, planas, cônicas ou similares, pela combinação de um movimento circular produzido por um mancal e um movimento linear produzido por uma superfície de guia. Da mesma forma, máquinas-ferramenta convencionais tinham uma grande limitação inerente a usinagem de outras superfícies curvas. Por outro lado, numa máquina-ferramenta controlada numericamente por computador (CNC), a trajetória do movimento relativo entre uma ferramenta para usinar superfícies curvas e uma peça é separada pelo computador em componentes de movimento ao longo dos eixos de coordenadas previamente estabelecidos, e os componentes de movimento são armazenados na forma de dados numéricos discretos. Quando a usinagem está para ser realizada, servomotores são acionados, com base nos dados, em sincronismo com os pulsos gerados pelo computador, de tal forma que cada servomotor fornece um movimento específico ao longo de cada eixo de movimento de uma máquina-ferramenta, movimentando, portanto, uma ferramenta ao longo de uma trajetória pré-determinada (WADA, 1997).

Nas últimas décadas a evolução dos circuitos digitais disponibilizou uma tecnologia mais avançada permitindo o desenvolvimento de sistemas de controle automáticos mais adequados às necessidades atuais de produção, e hoje os controles

[1] O princípio de reproduzir indica que uma porção usinada da peça está diretamente relacionada com a precisão contida na própria máquina-ferramenta.

numéricos são utilizados não só para usinagem de superfícies curvas complicadas, mas também para melhorar a eficiência da produção (WADA, 1997).

A engenharia de precisão vem sendo vista pelo mercado mundial, como um tópico de grande importância no desenvolvimento competitivo internacional em termos de qualidade e produtividade. As características de uma máquina-ferramenta têm uma grande influência sobre a qualidade final da peça produzida, pois segundo o princípio de reproduzir, qualquer incerteza na máquina-ferramenta será repassada para a superfície da peça usinada. Nas máquinas CNC é percebido durante sua vida útil, um aumento de incertezas e desatualizações tecnológicas, tornando-as inadequadas para usinagem de precisão. Segundo Brenes (1994), isto ocorre devido à deterioração das características originais de alguns componentes, tais como guias, fusos e outros elementos de transmissão e/ou pela defasagem e obsolescência presente em sistemas de posicionamento lentos e de características dinâmicas inadequadas ou ainda em componentes mecânicos e eletroeletrônicos ultrapassados.

Diversos trabalhos visando melhorar a qualidade final das peças usinadas em máquinas CNC vêm sendo realizados. Brenes (1994) realizou a modernização e análise dinâmica de uma fresadora de três eixos comandada numericamente. Este trabalho descreve todos os passos para realização de um *retrofitting*[2] em uma máquina deste tipo e se realiza uma verificação de seu comportamento dinâmico através de ensaios para obter a resposta no tempo e na frequência dos posicionadores X e Y. Esses testes permitiram concluir, que após a modernização a máquina apresentou resultados satisfatórios em relação à rapidez de posicionamento e ao amortecimento, da ordem de grandeza dentro dos valores recomendados na literatura para este tipo de sistema.

Smith et al. (1995) avaliou dois diferentes tipos de controladores adaptativos para controle robusto de um dos eixos de posicionamento de uma máquina-ferramenta de precisão. Os controladores avaliados foram o PID adaptativo e compensador adaptativo em avanço de fase. Diante dos resultados experimentais pode-se concluir que o compensador adaptativo por avanço de fase mostrou-se ser mais robusto com respeito a várias mudanças nos parâmetros do sistema e nas formas das trajetórias.

Lacerda (1998) desenvolveu um controlador de erros de contorno com objetivo de minimizar o desvio ortogonal à trajetória desejada. Este trabalho consistiu de duas partes principais: o modelo matemático para obtenção do erro de contorno e o projeto do controlador. Os resultados de simulação e testes experimentais mostraram que a metodologia proposta é eficiente e pode ser bem adaptada a máquinas-ferramenta.

Jesus (1999) apresentou uma tecnologia de acionamento e controle empregada no desenvolvimento do sistema de posicionamento de um torno, onde estava fixado o suporte com a ferramenta, com a função de transmitir à ferramenta os movimentos de avanço e posicionamento com incerteza submicrométrica. Neste trabalho foi utilizado um controlador proporcional, integral e derivativo, mais *feedforward* (PI-D-FF) para se atingir uma melhor exatidão no posicionamento. O sistema de posicionamento foi composto por dois eixos (X e Z) e durante os ensaios de posicionamento detectou-se que o eixo Z alcançou a incerteza submicrométrica, já o eixo X devido à influência de folgas micrométricas não alcançou a incerteza submicrométrica.

Mariano (2003) propõe o uso de estratégia de identificação de parâmetros e controle adaptativo em uma mesa de posicionamento XY. Outros trabalhos envolvendo a

[2] A atualização e reforma em uma máquina-ferramenta é denominada *retrofitting*.

aplicação de técnicas de controle de mesas XY em máquinas CNC vêm sendo realizados, como: Younkin (1991), Tomizuka et al. (1992), Larsen et al. (1995), Rao & Ro (1995), Tung et al. (1996), Chang et al. (1997), Mei et al. (2001).

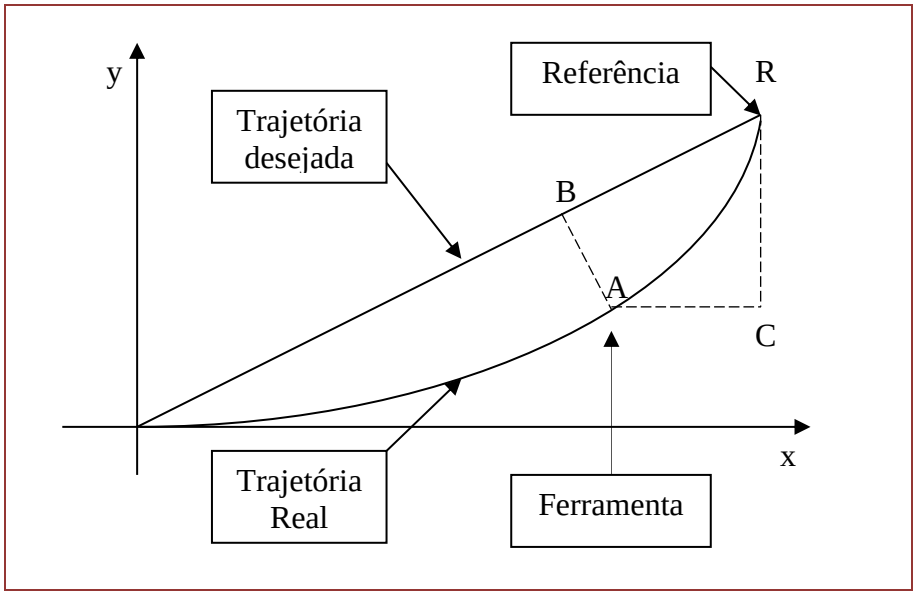
As mesas XY estão presentes em diversos tipos de máquinas-ferramenta e tem a função de posicionar adequadamente a peça ou a ferramenta para o trabalho de uma usinagem. Segundo Jesus (1999), a exatidão de posicionamento e a suavidade do movimento são fatores determinantes da exatidão de forma e da rugosidade da peça produzida, o sistema de posicionamento é um dos pontos críticos de uma máquina-ferramenta, ou seja, o máximo de exatidão que a máquina pode alcançar está diretamente vinculado à capacidade do sistema de posicionamento. Weck (1984) enumera diversos fatores que podem causar erros de posicionamento nas máquinas CNC, como por exemplo:

- Constante de tempo dos servomotores muito alto;
- Diferença na variação de velocidade entre eixos;
- Comportamento não linear de alguns elementos do sistema (folgas, não retilineidade das guias, deformações elásticas, deformações térmicas etc.);
- E variação das propriedades dinâmicas dos elementos de acionamento do sistema (motor e componentes de transmissão mecânica).

As recentes metodologias de projeto de controladores de movimento seguem três vertentes principais: Controladores realimentados, de alimentação direta e controladores de erro de contorno. Os primeiros utilizam realimentação da saída para obter um sinal de controle que tem como objetivo minimizar a diferença entre a saída real e a desejada. Os controladores de alimentação direta utilizam um artifício matemático que segue uma tática de multiplicar a função de transferência da planta pela sua inversa obtendo assim uma saída igual à entrada. Esses tipos de controladores corrigem os erros axiais, enquanto os controladores de erro de contorno têm a função de eliminar o desvio ortogonal à trajetória desejada, ou seja, os controladores de erro de contorno minimizam o desvio da trajetória da ferramenta em relação à trajetória desejada (Lacerda,1998).

O termo *erro de contorno* é usado para a componente do erro ortogonal à trajetória desejada, ou seja, é o desvio da aresta cortante em relação ao caminho especificado (Lacerda, 1998). O *erro de contorno* para uma trajetória plana corresponde ao segmento $\overline{AB}$ mostrado na Figura 1.1. Os segmentos $\overline{AC}$ e $\overline{AR}$ correspondem aos erros axiais nas direções x e y.

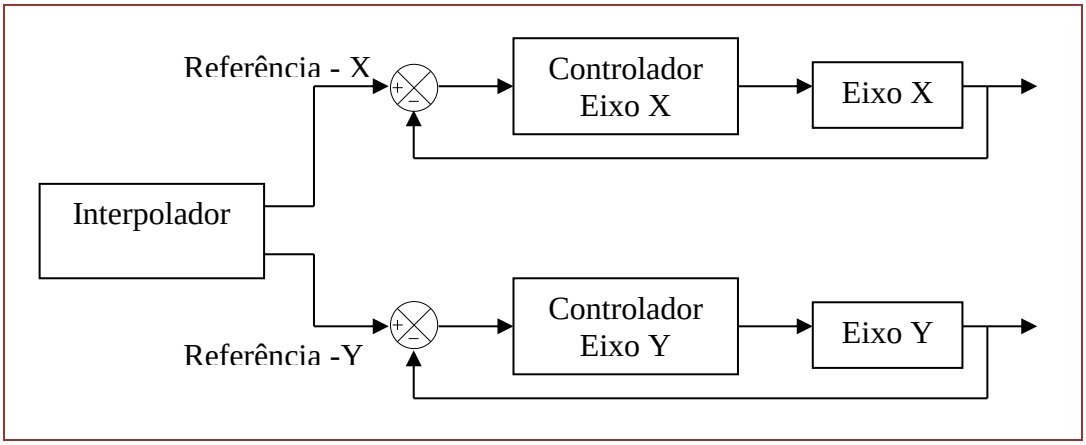
Figura 1.1 – Erros axiais e erro de contorno



Neste trabalho, são implementados, através de simulações, controladores realimentados em um modelo de um dos eixos de mesa XY proposto por Lacerda (1998), em seguida são avaliados os resultados dos diferentes tipos controladores implementados ao sistema e indicado qual dos controladores apresenta melhor desempenho. Também é apresentada neste trabalho uma técnica de estimação recursiva para identificação experimental do modelo de um eixo de uma mesa XY. A bancada experimental é resultado da atualização realizada em uma mesa de posicionamento XY de uma máquina de eletroerosão convencional, a qual, parte-se do pressuposto, que não se conhece nenhum de seus parâmetros elétrico ou mecânico. Finalmente após serem avaliadas as diversas técnicas de controle e a técnica de estimação de parâmetros por mínimos quadrados recursivo, são apresentadas as conclusões finais.

A Figura 1.2 apresenta o diagrama de blocos típico do sistema de controle empregado em uma mesa XY.

Figura 1.2 – Diagrama de blocos do sistema de controle de uma mesa XY



1.1. ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

Este trabalho é composto por 5 capítulos e 1 apêndice organizado da seguinte forma:

No capítulo 2 é realizado o modelamento matemático do sistema de um dos eixos da mesa XY. As equações que representam o comportamento do sistema são deduzidas e a função de transferência é determinada. O sistema no espaço de estados também é modelado. Ao final do capítulo, todos os parâmetros necessários ao cálculo da função de transferência e da equação de estado do sistema são apresentados. Faz-se, então, uma análise do comportamento do sistema sem a existência de qualquer controle.

No capítulo 3 são projetados controladores proporcionais (P), proporcionais-derivativos (PD), proporcionais-integrais (PI), proporcionais-integrais-derivativos (PID) e é apresentado o procedimento para obtenção de controlador via imposição de pólos. Os controladores P, PD, PI e PID são projetados usando-se o critério de estabilidade de *Routh*. Os procedimentos para projeto de controladores via imposição de pólos são fundamentados em uma realimentação de estados, porém, não implementado no pressente trabalho, devido o sistema não se apresentar de forma complemente controlável. Conclui-se o capítulo apresentando os resultados de simulações.

No capítulo 4 aborda-se a concepção de uma bancada experimental e a estimação dos parâmetros e identificação da resposta do sistema que representa tal bancada. Conclui-se o capítulo apresentando os resultados experimentais.

No capítulo 5 contém as conclusões finais e indica propostas futuras para continuação do presente trabalho.

CAPÍTULO

02 Modelagem de um eixo de uma mesa XY

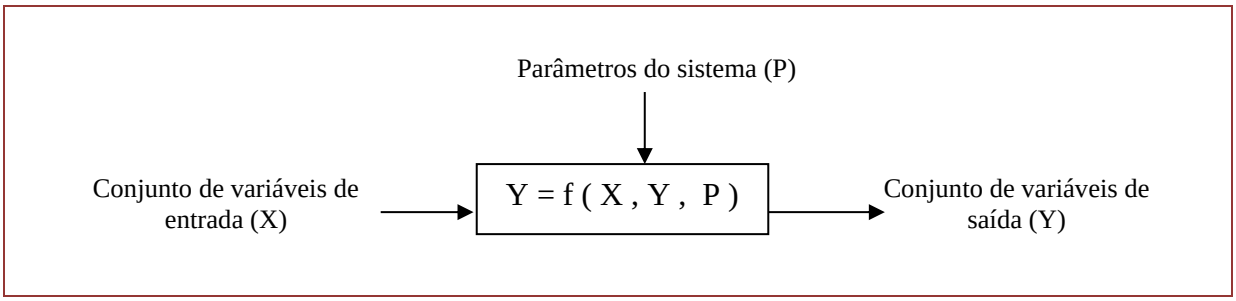
2.1. INTRODUÇÃO

A obtenção de um modelo matemático para um dos eixos da mesa XY é essencial para o projeto e simulação dos controladores lineares. Sendo assim, neste capítulo serão descritos alguns conceitos básicos sobre modelagem matemática e em seguida é apresentado o desenvolvimento de um modelo matemático para um dos eixos da mesa XY.

2.2. DEFINIÇÕES E CONSIDERAÇÕES SIMPLIFICADORAS

A modelagem matemática é a área do conhecimento que estuda maneiras para desenvolver e implementar equações ou conjuntos de equações que se aproximem aos sistemas reais (GARCIA, 1997 e AGUIRRE, 2000). Como se trata de uma aproximação, o modelo matemático não é único, pois existe uma família de modelos com características e desempenhos variados para o mesmo sistema e, dificilmente estes modelos conterão todas as características do sistema real. Apresenta-se na Figura 2.1 o diagrama de modelo matemático simplificado de um sistema, apresentado por Garcia (1997), de onde se pode afirmar que o modelo matemático trata-se de um sistema de equações que envolvem os parâmetros do sistema e que relaciona o conjunto de variáveis de entrada com o conjunto de variáveis de saída.

Figura 2.1 – Modelo matemático simplificado de um sistema



Para reduzir a complexidade do modelo, frequentemente fazem-se considerações simplificadoras. Algumas considerações comumente feitas são a linearidade e a invariância no tempo.

A linearidade supõe que o sistema a ser modelado tem, em uma determinada faixa limitada de operação, um comportamento linear. Formalmente, diz-se que um sistema é linear se ele satisfaz o princípio da superposição. O princípio da superposição estabelece que a resposta produzida pela aplicação simultânea de duas excitações diferentes é igual

à soma das duas respostas individuais a cada uma das excitações (OGATA, 1998). Pode-se dizer que um sistema linear tem o mesmo tipo de comportamento independentemente do ponto de operação (AGUIRRE, 2000).

A consideração de invariância temporal implica que o comportamento do sistema a ser modelado não varia com o tempo, o que não quer dizer que o sistema esteja em condição estática, e sim, que a evolução temporal das varáveis que caracterizam o sistema sejam regidas por uma lei. Normalmente refere-se a essa lei como sendo a dinâmica do sistema. Formalmente, diz-se que um sistema é invariante se um deslocamento no tempo na entrada causa um deslocamento no tempo na saída, e diz-se que um sistema é invariante no tempo se sua dinâmica não varia com o tempo. Admitir que a dinâmica do sistema não se altera no decorrer do tempo, apesar de não ser verdade na maioria dos sistemas reais, é uma importante premissa para modelagem matemática (AGUIRRE, 2000).

2.2.1. TIPOS DE MODELOS

Existem várias maneiras de se obter um modelo matemático. Os tipos mais comuns são: os modelos estáticos, dinâmicos, discretos, contínuos, autônomos, não autônomos, monovariáveis, multivariáveis, determinísticos, estocásticos, paramétricos e não paramétricos.

Os modelos estáticos relacionam variáveis sem quantificar sua dependência temporal, sendo assim, este deverá ser utilizado quando a dinâmica do sistema não for relevante, ou seja, quando a evolução temporal das variáveis que caracterizam o sistema for muito rápida ou muito lenta, se comparada com a escala de tempo de interesse, em caso contrário deve-se optar por um modelo dinâmico. Modelos estáticos são normalmente descritos por equações algébricas, ao passo que modelos dinâmicos são compostos por equações diferenciais, sendo que tais modelos podem também incluir equações algébricas (AGUIRRE, 2000). Existem ainda duas classificações para os modelos dinâmicos que são os modelos dinâmicos contínuos e os modelos dinâmicos discretos, o primeiro deles são descritos por equações diferenciais contínuas e representam a evolução do sistema continuamente no tempo, enquanto os discretos representam a evolução do sistema em períodos de amostragem.

Os modelos podem ser autônomos ou não autônomos, diz-se que um modelo é autônomo se este não contém sinais de entrada, se um modelo possui pelo menos uma entrada será denominado não autônomo. Segundo o número de entradas e saídas os modelos classificam-se em monovariáveis e multivariáveis. Os modelos que possuem uma entrada e uma saída são denominados de monovariáveis e são conhecidos como modelos SISO (*Single Input, Single Output*). Nos modelos multivariáveis a sua classificação depende do número de entradas e de saídas, no caso de modelos com múltiplas entradas e uma saída são denominados de modelos MISO (*Multiple Input, Single Output*); modelos com uma entrada e múltiplas saídas são chamados de SIMO (*Single Input, Multiple Output*); e os modelos que possuem múltiplas entradas e múltiplas a saídas são classificados como MIMO (*Multiple Input, Multiple Output*).

Os modelos podem ser determinísticos ou estocásticos. Os modelos que não estão representadas as incertezas presentes no contexto de um problema real são chamados de determinísticos, no caso dos modelos estocásticos as incertezas são incluídas, ou seja, em

um modelo estocástico a saída não pode ser determinada a partir de dados referentes ao passado (AGUIRRE, 2000).

Os modelos podem ser classificados como paramétricos quando tiverem parâmetros, ou seja, coeficientes que os caracterizem ou não paramétricos quando estiverem na forma de representação gráfica.

2.2.2. MÉTODOS PARA OBTENÇÃO DAS EQUAÇÕES DE UM MODELO

As equações poderão ser desenvolvidas: analiticamente, utilizando-se dos princípios da Física e da Química; pelo método empírico com a observação e correlação dos dados de entrada e saída do sistema; ou por analogia, utilizando-se de equações que descrevem um sistema análogo e com as variáveis identificadas por analogia.

Para se poder empregar um modelo *analítico* há necessidade de se conhecer certos parâmetros do sistema, os quais usualmente devem ser avaliados a partir de experimentos físicos ou então obtidos de dados operacionais do sistema (GARCIA, 1997). Devido ao conhecimento e tempo necessário para modelar um sistema partindo do equacionamento dos fenômenos envolvidos, nem sempre é viável se utilizar o modelo analítico, por outro lado à modelagem *empírica* tem se mostrado mais fácil de ser gerada, pois tem como característica a exigência de pouco ou nenhum conhecimento prévio do sistema. A modelagem empírica também conhecida por identificação caixa preta é uma área de conhecimento que estuda técnicas alternativas de modelagem matemática (AGUIRRE, 2000).

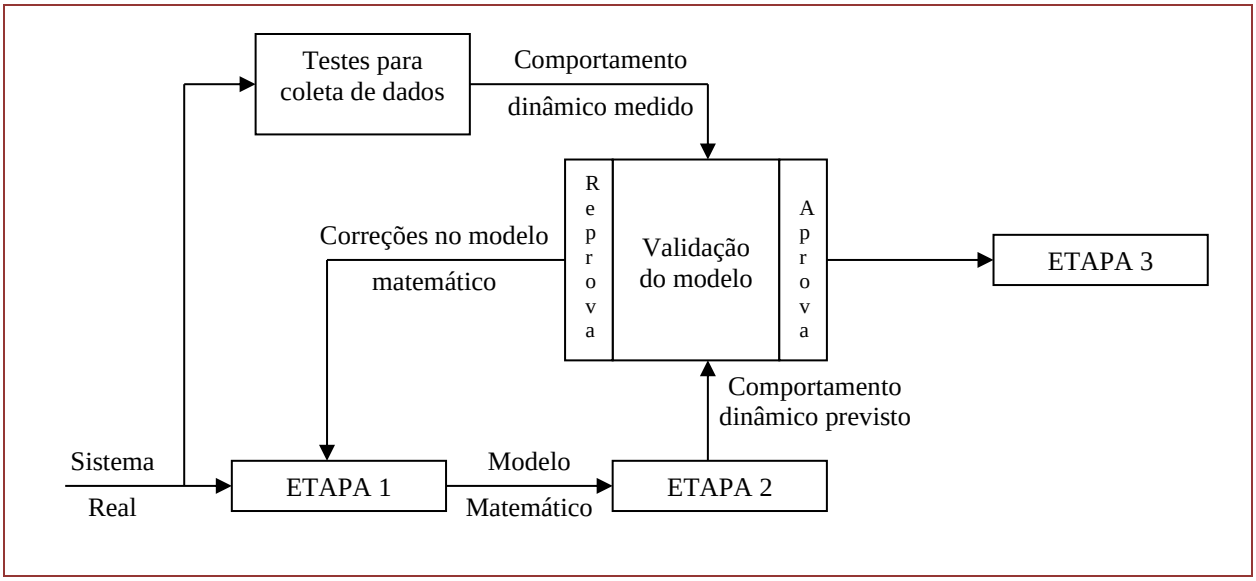
2.2.3. ETAPAS PARA OBTENÇÃO DE UM MODELO DINÂMICO

Segundo Garcia (1997) existem três etapas básicas para obtenção de um modelo dinâmico de um sistema, são eles:

1. Obtenção de um modelo matemático para representar os fenômenos físicos, cujo comportamento se ajuste suficientemente bem ao comportamento do sistema real;
2. Estudo do comportamento dinâmico do modelo matemático. Nesta etapa verifica-se a resposta temporal das variáveis de saída em relação às alterações nas variáveis de entrada;
3. Aplicação do modelo matemático encontrado.

Na Figura 2.2, onde se pode ver as etapas para obtenção de um modelo dinâmico para um sistema, pode-se perceber a característica de realimentação do sistema, a qual permite que erros no modelo matemático original possam ser detectados e corrigidos através da comparação entre os valores simulados e reais. Esse processo de comparação e correção é denominado *Validação do Modelo*.

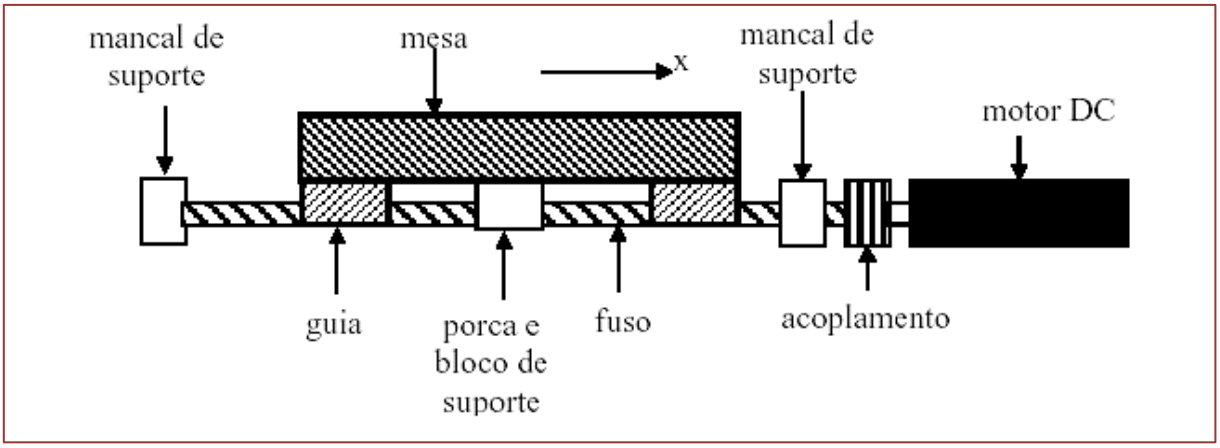
Figura 2.2 – Etapas para obtenção de um modelo dinâmico



2.3. DESCRIÇÃO DE UM DOS EIXOS DA MESA X-Y

Uma mesa XY é composta por dois eixos, um montado sobre o outro, cada um dos eixos contém vários elementos, os quais possuem características mecânicas tais como elasticidade axial e torcional, inércia, atrito, folgas, além de estarem sujeitos a deformação térmica. O eixo da mesa XY em estudo é composto basicamente de um motor de corrente contínua com campo magnético fixo; acoplamento mecânico; fuso com rosca de perfil quadrado; porca; mancais; guias retangulares; bloco suporte; e mesa móvel, conforme mostrado na Figura 2.3.

Figura 2.3 – Eixo da Mesa XY



Funcionamento do sistema: Inicialmente é aplicada uma tensão contínua no enrolamento de armadura do motor, que por sua vez, transforma a tensão aplicada em movimento de rotação em seu eixo. Através de um acoplamento mecânico o movimento do eixo é transmitido para fuso. O fuso apoiado por mancais montados na mesa móvel, e acoplado a uma porca presa à mesa fixa (bloco suporte) transforma movimento de

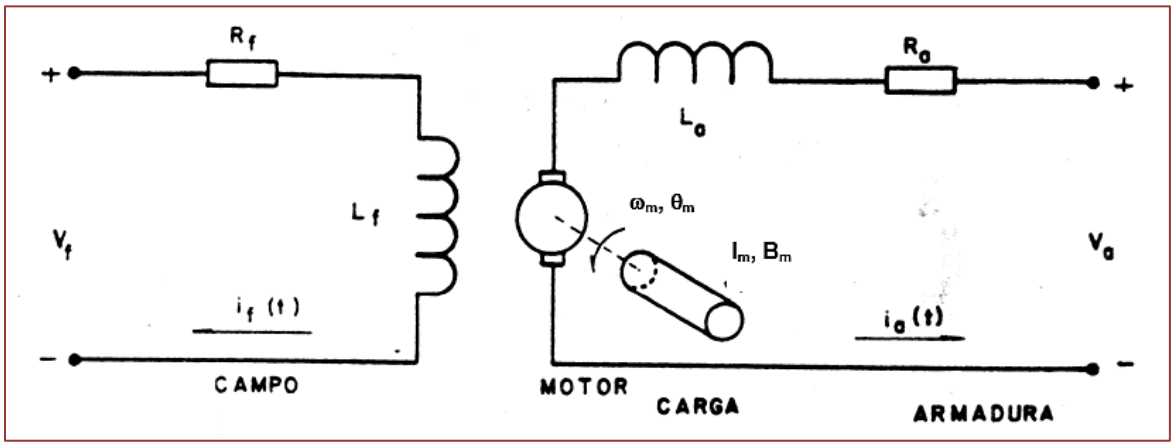
rotação em movimento linear da mesa móvel que se encontra apoiada por guias retangulares.

2.4. MODELAGEM DINÂMICA PELO MÉTODO ANALITICO DE UM MOTOR CORRENTE CONTÍNUA CONTROLADO PELA ARMADURA

O desenvolvimento tecnológico de motores provocou o aparecimento de motores de corrente contínua com campos magnéticos permanentes com alta intensidade de campo e rotores com baixa inércia, ou seja, com elevada relação torque-inércia. Estes motores com campos permanentes são controlados pela corrente de armadura (LIMA, 1983). Além das características já citadas, os motores de corrente contínua possuem a vantagem de permitir uma relação linear na transformação de energia elétrica em energia mecânica.

Para reduzir a complexidade do modelo serão desprezadas a histerese, correntes parasitas e queda de tensão através das escovas. Mostra-se na Figura 2.4 o esquemático de um motor de corrente contínua apresentado por Lima (1983).

Figura 2.4 – Esquemático de um motor CC



em que,

V_f - Tensão no campo;
R_f - Resistência do enrolamento de campo;
L_f - Indutância do enrolamento de campo;
i_f - Corrente de campo;
V_a - Tensão na armadura;
R_a - Resistência do enrolamento da armadura;
L_a - Indutância do enrolamento da armadura;
i_a - Corrente de armadura;
ω_m - Rotação do eixo;
θ_m - Deslocamento do eixo;
I_m - Momento de inércia do rotor;
B_m - Coeficiente de atrito viscoso nos mancais do motor.

Para análise linear será considerado que o fluxo de entreferro do motor é proporcional à corrente de campo, ou seja:

$$\phi = K_f \, . \, i_f \qquad (2.1)$$

em que,

ϕ — Fluxo do motor em webers

K_f — Constante do campo do motor [webers/A].

Supõe-se ainda que o torque desenvolvido pelo motor seja linearmente relacionado com o fluxo do motor e com a corrente da armadura, ou seja:

$$T_m(t) = K_1 \,.\, \phi \,.\, i_a(t) = K_1 \,.\, K_f \,.\, i_f(t) \,.\, i_a(t) \tag{2.2}$$

em que,

T_m — torque do motor [N.m];

K_1 — constante do motor [N.m/webers.A].

É observado na Equação 2.2 que para se obter uma relação linear para o torque do motor, uma das correntes deve ser mantida constante enquanto a outra se torna a corrente de entrada. No caso dos motores de corrente contínua controlados pela armadura o campo é alimentado com uma tensão constante a fim de tornar a corrente de campo constante, e consequentemente:

$$T_m(t) = K_m \,.\, i_a(t) \tag{2.3}$$

em que, $K_m = K_1 \,.\, K_f \,.\, i_f(t)$ e é chamado de constante de torque [N.m/A]. Analisando o circuito da armadura na Figura 2.2, tem-se:

$$V_a(t) = R_a.i_a(t) + L_a.\frac{di_a(t)}{dt} + V_b(t) \tag{2.4}$$

em que $V_b(t)$ é a força contra eletromotriz proporcional à velocidade do eixo do motor:

$$V_b(t) = K_b \,.\, \omega_m(t) \tag{2.5}$$

em que K_b é uma constante do motor [v.s/rad]. Sendo assim, da Equação 2.4, tem-se:

$$\frac{di_a(t)}{dt} = \frac{1}{L_a}\left(V_a(t) - V_b(t) - R_a i_a(t)\right) \tag{2.6}$$

ou

$$\dot{i}_a(t) = \frac{1}{L_a}\left(V_a(t) - V_b(t) - R_a i_a(t)\right) \tag{2.7}$$

Substituindo a Equação 2.5 na Equação 2.7, tem-se:

$$\dot{i}_a(t) = \frac{1}{L_a}V_a(t) - \frac{K_b}{L_a}\omega_m(t) - \frac{R_a}{L_a}i_a(t) \tag{2.8}$$

Segundo Lima (1983), o torque motor é dado por:

$$T_m(t) = T_L(t) + T_d(t) \tag{2.9}$$

em que,

T_L — Torque necessário para deslocar o eixo da mesa XY;

T_d — Torque externo.

No caso das máquinas ferramentas, o torque externo é gerado pelas forças de corte que surgem durante a usinagem (LACERDA, 1998). Para reduzir a complexidade do modelo essas forças serão desprezadas. Sendo assim o torque motor será:

$$T_m(t) = T_L(t) = I_m . \frac{d^2\theta}{dt^2} + B_m . \frac{d\theta}{dt} \tag{2.10}$$

ou

$$\ddot{\theta}_m(t) = \frac{T_m(t)}{I_m} - \frac{B_m}{I_m}\omega_m \tag{2.11}$$

Substituindo a Equação 2.3 na Equação 2.10, tem-se:

$$\ddot{\theta}_m(t) = \frac{K_m}{I_m} i_a(t) - \frac{B_m}{I_m}\omega_m \tag{2.12}$$

Colocando a Equação 2.8 e a Equação 2.12 na forma de equação de estados, obtém-se:

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta}_m(t) \\ \dot{\omega}_m(t) \\ \dot{i}_a(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{B_m}{I_m} & \frac{K_m}{I_m} \\ 0 & -\frac{K_b}{L_a} & -\frac{R_a}{L_a} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_m(t) \\ \omega_m(t) \\ i_a(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{L_a} \end{bmatrix} V_a(t) \tag{2.13}$$

A equação da saída é:

$$\begin{bmatrix} \theta_m(t) \\ \omega_m(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_m(t) \\ \omega_m(t) \\ i_a(t) \end{bmatrix} \tag{2.14}$$

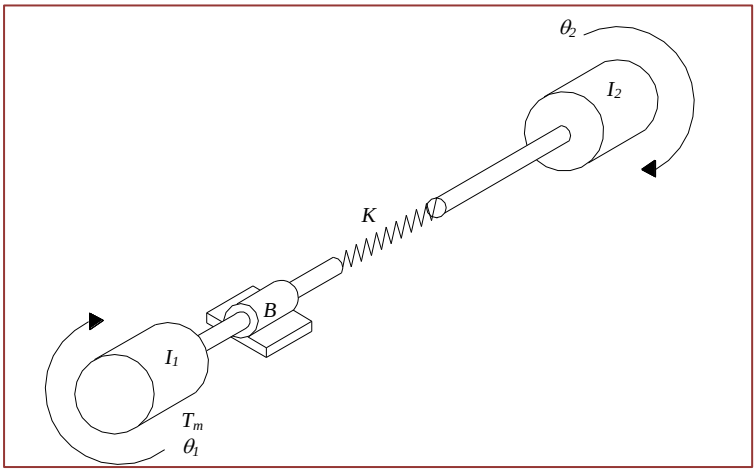
2.5. MODELAGEM DINÂMICA PELO MÉTODO ANALITICO DE UM DOS EIXOS DA MESA XY

Quando se propõe obter um modelo dinâmico para um sistema qualquer, não se busca que este possua uma descrição completa e detalhada da planta, mas sim um modelo

simples e adequado. No caso das mesas XY, este modelo deverá conter todas forças e torques que afetam significativamente o movimento da mesa, incluindo forças devido à rigidez do sistema, as forças devidas à inércia e ao amortecimento que é provocado por atrito viscoso nos mancais e o atrito seco nas guias. Apresenta-se na Figura 2.5 o modelo de um eixo de movimento retilíneo idealizado por Lacerda (1998).

Este tipo de modelo, em que a potência de um motor é transmitida por meio de um eixo flexível para uma massa, também é citado em Garcia (1997).

Figura 2.5 – Modelo idealizado de um eixo da mesa de posicionamento XY



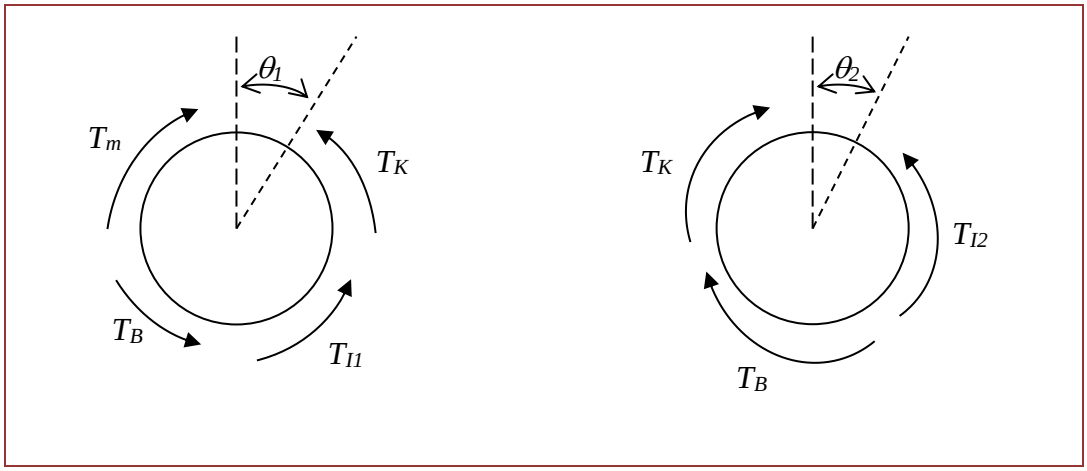
em que,

T_m — Torque motor;
B — Amortecimento existente no conjunto;
K — Coeficiente de rigidez equivalente no sistema;
θ_1 — Deslocamento angular do rotor do motor;
θ_2 — Deslocamento angular do fuso;
I_1 — Soma da inércia do motor e do fuso;
I_2 — Inércia equivalente da mesa;

2.5.1. EQUAÇÕES DO SISTEMA

Na Figura 2.5 pode-se observar o diagrama de corpos livres do sistema modelado na Figura 2.6.

Figura 2.6 – Diagrama de corpos livres do sistema idealizado para um eixo da mesa de posicionamento XY



Na Figura 2.6, T_K é o torque resistivo originado das forças devido à rigidez do sistema; T_B e T_I são, respectivamente, os torques resistivos originados das forças devido ao amortecimento e a inércia do sistema.

– Balanço de torques:

$$\overset{+}{\circlearrowleft} \sum T = 0$$

$$T_m - T_K - T_B - T_{I1} = 0 \qquad (2.15)$$

$$T_K + T_B - T_{I2} = 0 \qquad (2.16)$$

– Relações constitutivas:

$$T_B = B(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2)$$

$$T_K = K(\theta_1 - \theta_2) \qquad (2.17)$$

$$T_{I1} = I_1\ddot{\theta}_1$$

$$T_{I2} = I_2\ddot{\theta}_2$$

– Equações do movimento:

Substituindo as Equações 2.17 e 2.3 em 2.15 e 2.16, tem-se:

$$I_1\ddot{\theta}_1 + B(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) + K(\theta_1 - \theta_2) = K_m i_a \qquad (2.18)$$

e

$$I_2\ddot{\theta}_2 - B(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) - K(\theta_1 - \theta_2) = 0 \tag{2.19}$$

Reorganizando as Equações 2.18 e 2.19 na forma de um sistema de equações diferenciais, obtêm-se as seguintes equações de movimento:

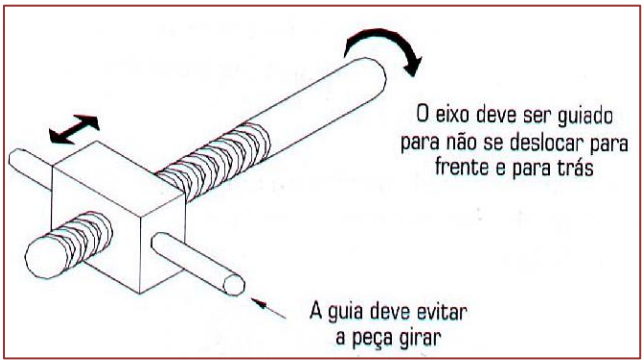
$$\begin{bmatrix} I_1 & 0 \\ 0 & I_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B & -B \\ -B & B \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K & -K \\ -K & K \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_m i_a \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2.20}$$

2.5.2. MODELAGEM DINÂMICA E CINEMÁTICA DO FUSO

O fuso nas mesas posicionadoras é um mecanismo que permite converter o movimento de rotação do eixo do motor em movimento de translação da mesa.

Este sistema consiste simplesmente num eixo cilíndrico com rosca, o qual é apoiado por mancais e acoplado a uma porca com rosca do mesmo tipo provida de guias, para evitar sua rotação durante o movimento. Assim, quando o fuso girar, acionado pelo motor, a rosca, incapaz de girar por causa das guias, avançará ou retrocederá dependendo do sentido de rotação do eixo do motor, como ilustra a Figura 2.7.

Figura 2.7 – Esquema simplificado de um fuso (PAZOS, 2002)



Sabe-se ainda, que a relação proporcional entre o deslocamento retilíneo da porca e o deslocamento angular do fuso é dado por:

$$x(t) = \ell.\theta_2 \tag{2.21}$$

em que ℓ é o passo angular, e é expresso, por:

$$\ell = \frac{p}{2\pi} \tag{2.22}$$

em que *p* é o passo do fuso.

Segundo Shigley e Mischke (1989) a relação entre o torque aplicado no eixo e a força aplicada à porca é expressa por:

$$f = \frac{2T_m}{d_e}\left(\frac{\pi d_e - \mu p \sec\beta}{p + \mu\pi d_e \sec\beta}\right) \tag{2.23}$$

em que,

μ — Coeficiente de atrito entre os filetes da rosca;

β — ângulo do filete da rosca em relação à vertical;

d_e — diâmetro efetivo da rosca (duas vezes a distância do centro do eixo até o ponto de contato).

Para roscas com filetes de perfil quadrado, tem-se $\beta = 0$.

Com o objetivo de aumentar o rendimento das máquinas-ferramenta, as mesas posicionadoras das máquinas mais modernas são movimentadas por um dispositivo similar aos fusos tradicionais, o qual é denominado de *ball screw* (fuso de esferas). Esse dispositivo possui esferas entre os filetes da rosca, a fim de facilitar o deslizamento e diminuir o atrito. O rendimento mecânico é superior a 90% e o atrito é mínimo, resultando em uma menor potência de acionamento, redução do efeito *stick-slip*, menor aquecimento e maior durabilidade. Permite um posicionamento mais exato e uma velocidade de translação maior (LACERDA, 1998; PAZOS, 2002).

2.6. DETERMINAÇÃO DA FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA DO SISTEMA

A função de transferência de um sistema representado por equações diferenciais lineares invariantes no tempo é definida como a razão entre a transformada de Laplace da variável de saída e a transformada de Laplace da variável de entrada, na hipótese que todas as condições inicias são nulas (OGATA, 1998; PHILLIPS & HARBOR, 1996).

Para determinação da função de transferência de um dos eixos da mesa XY, utilizou-se de um procedimento denominado de redução de diagrama de blocos. Sendo assim, nesta seção é definido diagrama de blocos, apresenta-se um método para obtenção do diagrama de blocos, discute-se técnicas para simplificar tais diagramas e finalmente apresenta a função de transferência para um dos eixos da mesa XY.

2.6.1. DIAGRAMA DE BLOCOS

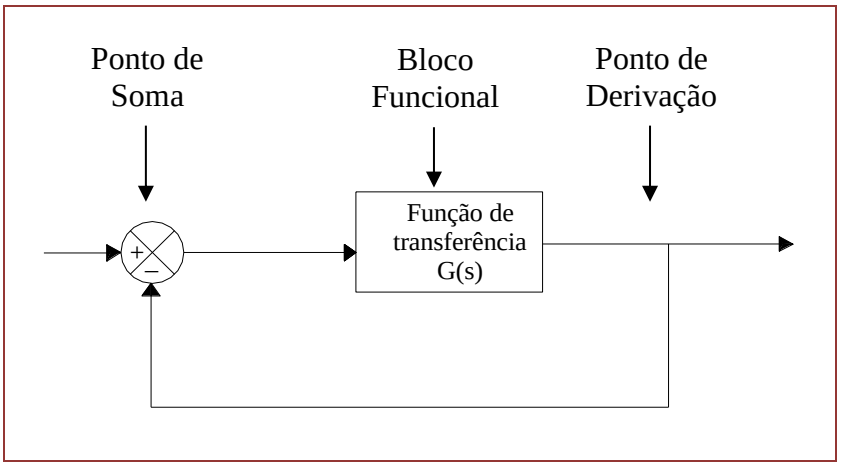
Um diagrama de blocos é uma representação gráfica das equações diferenciais que representam o sistema (PHILLIPS & HARBOR, 1996). Em um diagrama de blocos todas as variáveis do sistema são ligadas umas as outras através de blocos funcionais, onde estão introduzidas as funções de transferência do sistema. Esses blocos são conectados por setas para indicar o sentido unilateral do fluxo do sinal. Por definição, o valor do sinal de saída do bloco é o valor do sinal de entrada desse bloco multiplicado pela função de transferência do mesmo.

Além dos *blocos funcionais* dois elementos adicionais são necessários para representar equações através de um diagrama de blocos. Estes elementos são o *ponto de*

soma e *ponto de derivação*. Os pontos de soma são símbolos circulares com um X que indicam uma operação de soma. O sinal de mais ou menos em cada segmento orientado indica se este sinal deve ser adicional ou subtraído. É importante que as grandezas a serem somadas ou subtraídas tenham as mesmas grandezas dimensionais. O ponto de derivação é ponto a partir do qual o sinal proveniente de um bloco vai simultaneamente para outros blocos ou pontos de soma. Na Figura 2.8 pode-se observar a simbologia de cada elemento que compõe um diagrama de blocos.

As vantagens da representação por diagrama de blocos de um sistema residem no fato de que é fácil formar o digrama de blocos global do sistema simplesmente conectado os blocos de cada componente do sistema de acordo com o fluxo do sinal (OGATA, 1998).

Figura 2.8 – Elementos de um diagrama de blocos



2.6.2. PROCEDIMENTOS PARA A CONSTRUÇÃO DE UM DIAGRAMA DE BLOCOS

Para se construir um diagrama de blocos de um sistema, escrevem-se primeiro as equações que descrevem o comportamento dinâmico de cada um dos componentes. Em seguida obtém-se a transformada de Laplace destas equações, supondo condições iniciais nulas, e representa-se individualmente, em forma de blocos, cada equação transformada por Laplace. Finalmente, reúnem-se os elementos em um diagrama de blocos completo.

No caso do eixo da mesa posicionadora, as Equações 2.8, 2.18, 2.19 e 2.21 são as equações diferenciais que descrevem o seu comportamento dinâmico, e suas transformadas de Laplace, com condições iniciais nulas, são:

$$I_a(s) = \frac{1}{L_a s + R_a}\left(V_a(s) - K_b s\,\Theta_1(s)\right) \tag{2.24}$$

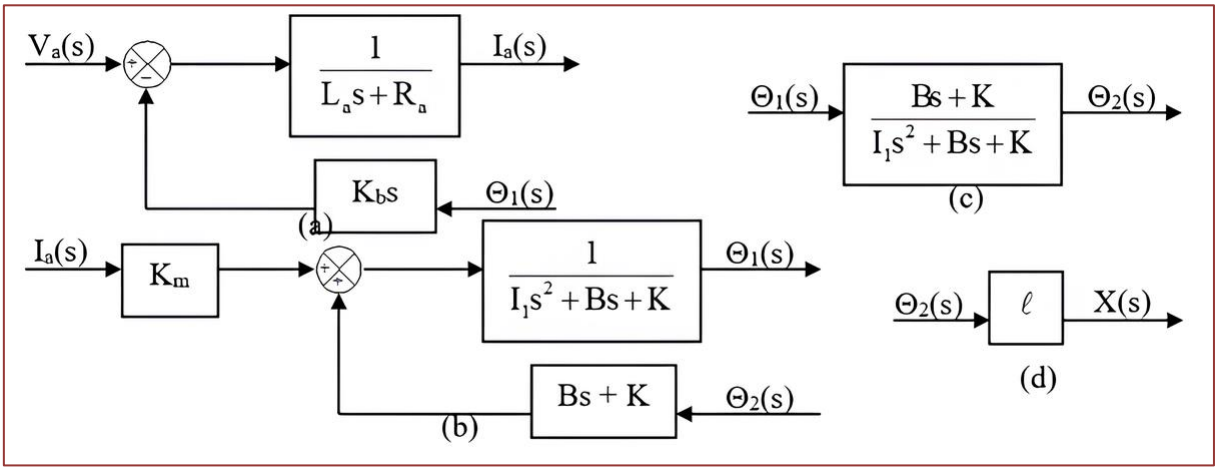
$$\Theta_1(s) = \frac{1}{I_1 s^2 + Bs + K}\left[K_m I_a(s) + (Bs + K)\Theta_2(s)\right] \tag{2.25}$$

$$\Theta_2(s) = \frac{Bs + K}{I_2 s^2 + Bs + K}\Theta_1(s) \tag{2.26}$$

$$X(s) = \ell.\Theta_2(s) \tag{2.27}$$

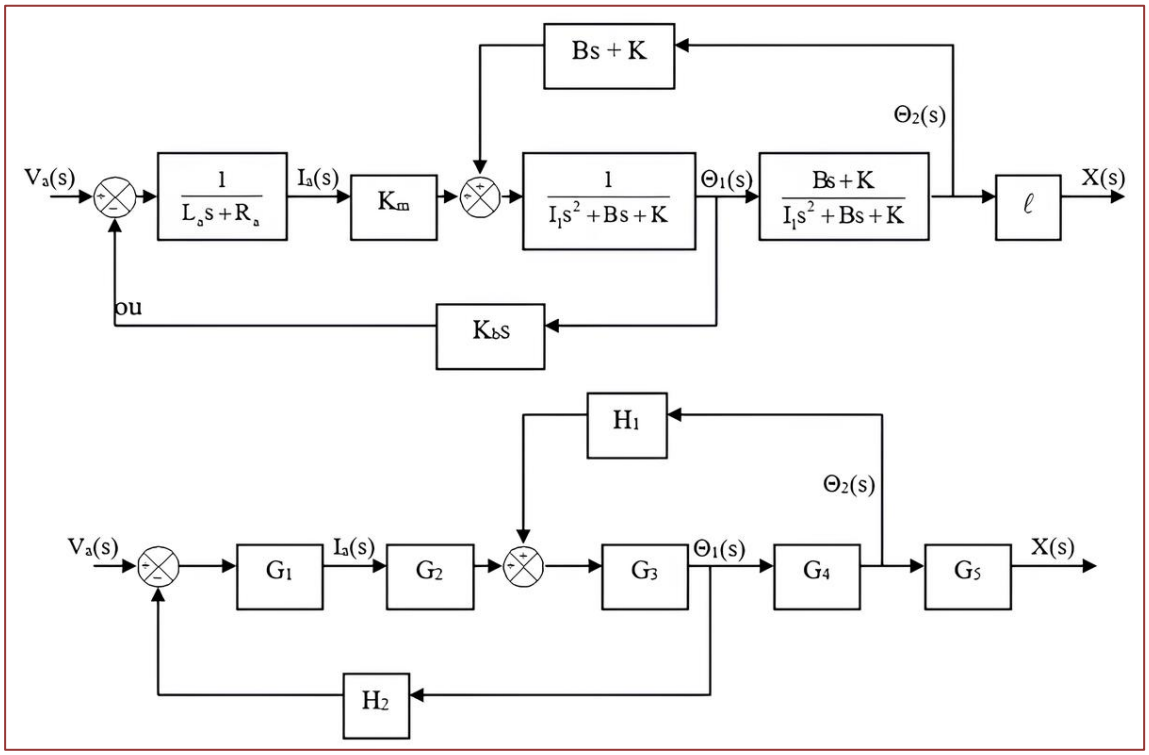
e os seus respectivos diagramas de blocos são:

Figura 2.9 – (a) Diagrama de blocos representando a Equação 2.23; (b) diagrama de blocos representando a Equação 2.24; (c) diagrama de blocos representando a Equação 2.25; (d) diagrama de blocos representando a Equação 2.26.



Reunindo os diagramas de blocos da Figura 2.8, tem-se:

Figura 2.10 – Diagrama de blocos para um dos eixos da mesa XY



em que,

$$G_1 = \frac{1}{L_a s + R_a}$$
$$G_2 = K_m$$
$$G_3 = \frac{1}{I_1 s^2 + Bs + K} \qquad (2.27)$$
$$G_4 = \frac{Bs + K}{I_1 s^2 + Bs + K}$$
$$G_5 = \ell$$

e

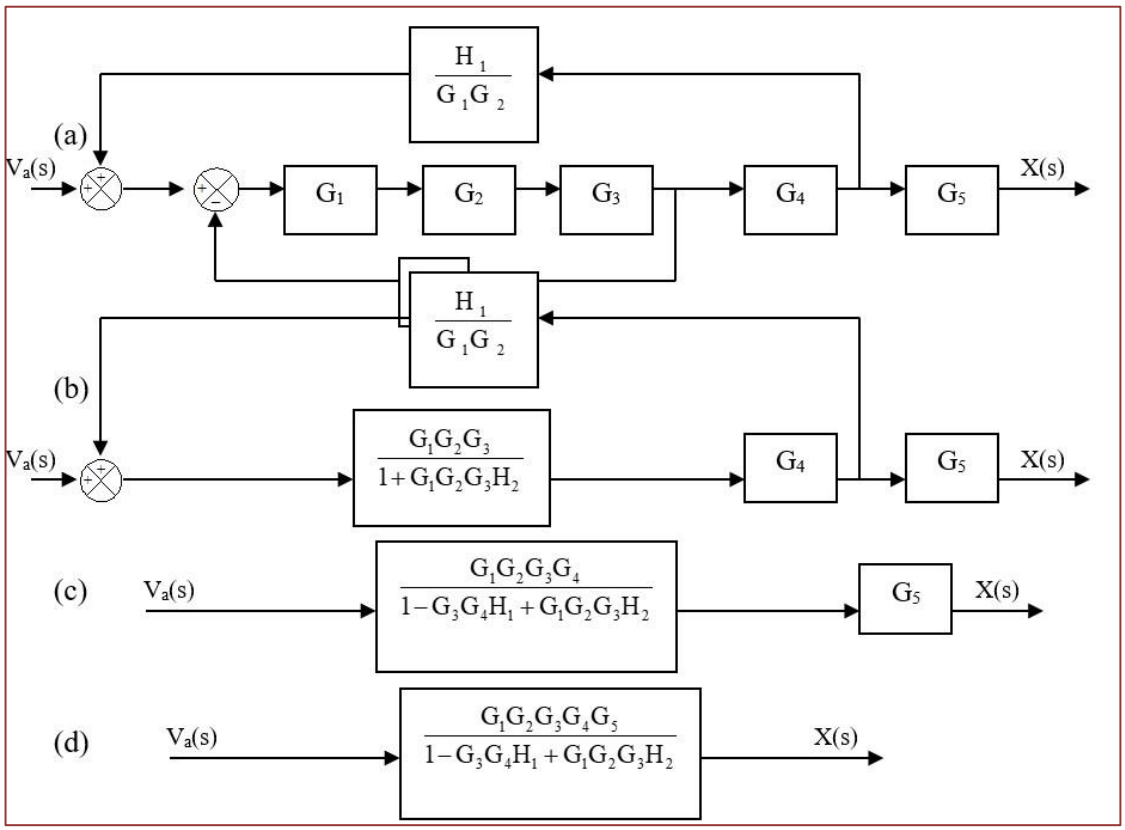
$$H_1 = Bs + K$$
$$H_2 = K_b s \qquad (2.28)$$

2.6.3. REDUÇÃO DE DIAGRAMA DE BLOCO

Um diagrama de blocos complexo, envolvendo muitas malhas de retroação, pode ser simplificado através de um procedimento passo a passo, usando as regras da álgebra para diagramas de blocos. Algumas dessas regras são fornecidas por Ogata (1998). A simplificação do diagrama de blocos por meio de rearranjos e substituições reduz consideravelmente o trabalho necessário na análise matemática para determinação da função de transferência global do sistema.

Utilizando-se as regras da álgebra para diagramas de blocos foi possível simplificar o diagrama de blocos da Figura 2.10 por meio do seguinte procedimento: Deslocando-se o ponto de soma da malha de retroação negativa que contém H_1 para fora da malha de retroação positiva que contém H_2, obtém-se a Figura 2.11(a); Eliminando-se a malha completa com retroação negativa, resulta a Figura 2.11(b); A Eliminação da malha completa contendo $\frac{H_1}{G_1 G_2}$ conduz à Figura 2.11(c); Finalmente realiza-se o produto entre as funções de transferência do percurso de ação direta resultando na Figura 2.11(d).

Figura 2.11 – (a)-(d) Redução sucessiva do diagrama de blocos apresentado na Figura 2.10



Da Figura 2.11(d), tem-se:

$$\frac{X(s)}{V_a(s)} = \frac{G_1G_2G_3G_4G_5}{1-G_3G_4H_1+G_1G_2G_3H_2} \tag{2.29}$$

Substituindo as Equações 2.27 e 2.28 em 2.29, determina-se a função de transferência global do sistema conforme a Equação 2.30:

$$\frac{X(s)}{V_a(s)} = \frac{\ell.K_m(Bs+K)K_x}{(I_1I_2L_a)s^5+[I_1I_2R_a+L_aB(I_1+I_2)]s^4+[(I_1+I_2)(BR_a+L_aK)+I_2K_mK_b]s^3+\ldots} \tag{2.30}$$

$$\ldots\overline{+[(I_1+I_2)R_aK+K_mK_bB]s^2+(K_mK_bK)s}$$

em que K_x é o ganho do amplificador de potência do motor.

2.7. MODELO MATEMÁTICO NO ESPAÇO DE ESTADOS

A forma de espaço de estados, é uma alternativa para se representar um sistema descrito por equações diferenciais lineares. Para descrever o modelo matemático do sistema apresentado na Figura 2.3 em forma de espaço de estado, foram escolhidos como

variáveis de estado os deslocamentos angulares θ_1 e θ_2, as velocidades angulares ω_1 e ω_2 e a corrente de armadura i_a, sendo assim, sabe-se que:

$$\omega_1 = \dot{\theta}_1 \tag{2.31}$$

e

$$\omega_2 = \dot{\theta}_2 \tag{2.32}$$

Substituindo as Equações 2.31 e 2.32 nas Equações 2.18 e 2.19, tem-se:

$$\dot{\omega}_1 = -\frac{K}{I_1}(\theta_1 - \theta_2) - \frac{B}{I_1}(\omega_1 - \omega_2) + \frac{K_m i_a}{I_1} \tag{2.33}$$

e

$$\dot{\omega}_2 = \frac{K}{I_2}(\theta_1 - \theta_2) + \frac{B}{I_2}(\omega_1 - \omega_2) \tag{2.34}$$

Das Equações 2.33 e 2.34, juntamente com a Equação 2.8, tem-se:

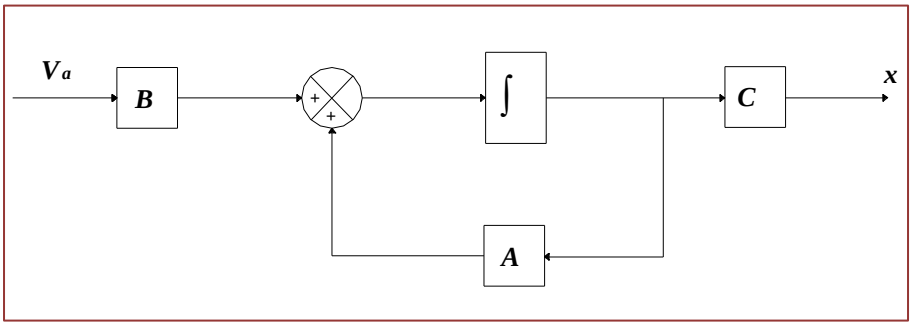
$$\begin{bmatrix} \dot{\theta}_1(t) \\ \dot{\omega}_1(t) \\ \dot{\theta}_2(t) \\ \dot{\omega}_2(t) \\ \dot{i}_a(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{K}{I_1} & -\frac{B}{I_1} & \frac{K}{I_1} & \frac{B}{I_1} & \frac{K_m}{I_1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{K}{I_2} & \frac{B}{I_2} & -\frac{K}{I_2} & -\frac{B}{I_2} & 0 \\ 0 & -\frac{K_b}{L_a} & 0 & 0 & -\frac{R_a}{L_a} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1(t) \\ \omega_1(t) \\ \theta_2(t) \\ \omega_2(t) \\ i_a(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{K_x}{L_a} \end{bmatrix} V_a(t) \tag{2.35}$$

Da Equação 2.21, tem-se que a equação de saída é apresentada na forma:

$$x(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \ell & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \omega_1 \\ \theta_2 \\ \omega_2 \\ i_a \end{bmatrix} \tag{2.36}$$

O diagrama de blocos representativo do modelo no espaço de estado é mostrado na Figura 2.12. Nessa figura, ***A*** é a matriz de estado, ***B*** é a matriz de entrada e ***C*** é a matriz de saída.

Figura 2.12 – Diagrama de blocos do sistema representado por espaço de estado (Poel, 2000)



2.8. ANÁLISE DA PLANTA DO SISTEMA

O modelo apresentado na Equação 2.30 contém vários parâmetros, os quais são relacionados, com seus respectivos valores, na Tabela 2.1. Esses valores são apresentados por Lacerda (1998) e foram obtidos de catálogos da THOMSON IND., fabricante de motores DC, amplificadores e eixos de movimento retilíneo.

Tabela 2.1 – Valores dos parâmetros usados no modelo

PARÂMETRO	SÍMBOLO	Valor	UNIDADE
Amortecimento do sistema	B	2,10 x 10^{-6}	N.m.s/rad
Passo angular do fuso de esferas	ℓ	7,96 x 10^{-4}	m/rad
Coeficiente de rigidez do sistema	K	1,10 x 10^{2}	N.m/rad
Constante de f.c.e.m	K_b	2,10 x 10^{-1}	V.s/rad
Constante de torque	K_m	2,00 x 10^{-1}	N.m/A
Indutância elétrica da armadura	L_a	6,70 x 10^{-3}	Henry, H
Inércia motor + fuso	I_1	2,70 x 10^{-5}	kg.m^2
Inércia equivalente da mesa	I_2	8,30 x 10^{-6}	kg.m^2
Resistência elétrica armadura	R_a	9,00	Ohm. Ω
Ganho do amplificador de potência	K_x	16,00	—

Valores obtidos em Lacerda (1998)

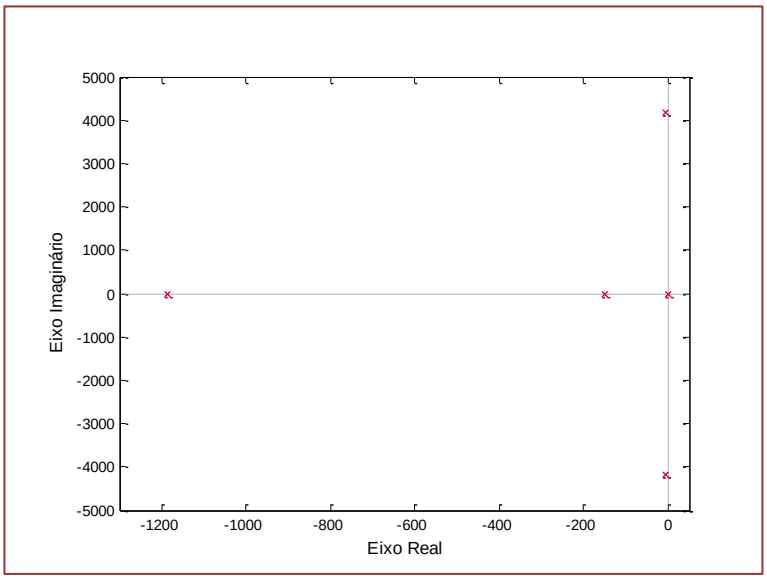
Substituindo os valores dessa Tabela 2.1 na Equação 2.30, tem-se:

$$G_P(S) = \frac{X(s)}{V_a(s)} = \frac{5{,}35x10^{-9}s + 0{,}28}{1{,}5x10^{-12}s^5 + 2{,}02x10^{-9}s^4 + 2{,}64x10^{-5}s^3 + 3{,}49x10^{-2}s^2 + 4{,}62s} \qquad (2.37)$$

Os pólos de malha aberta do sistema são:

$p_1 = 0;$ $p_{2,3} = -\sigma \pm j\omega = -2{,}1 \pm 4168{,}6j;$ $p_4 = -1190{,}7;$ $p_5 = -148{,}7.$

Figura 2.13 – Pólos do sistema



A frequência natural (ω_n) e o fator de amortecimento (ζ) dos pólos complexos conjugados, são:

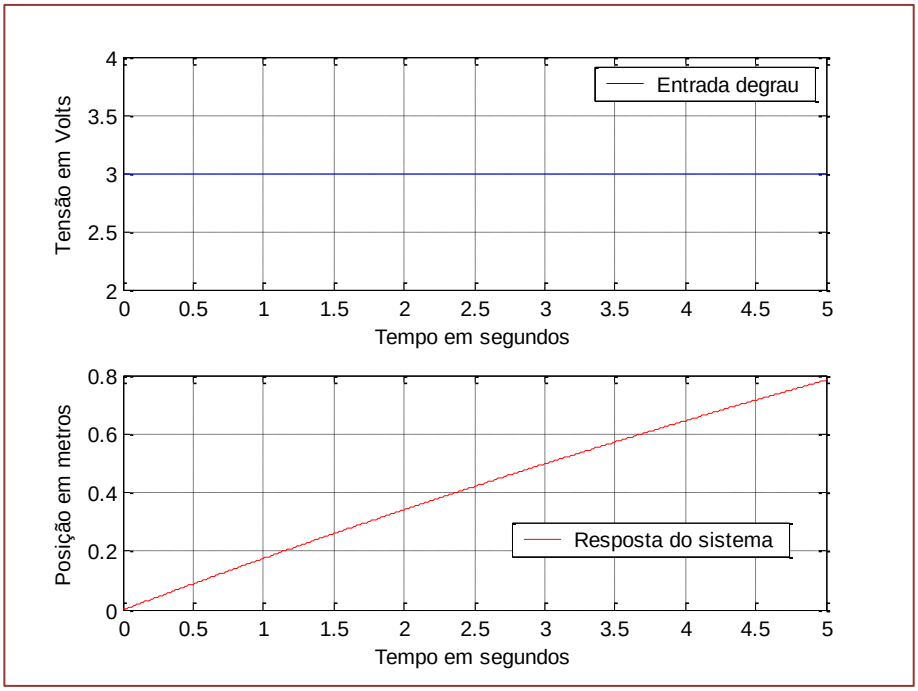
$$\omega_n = \sqrt{\sigma^2 + \omega^2} = \sqrt{(2{,}1)^2 + (4168{,}6)^2} = 4168{,}6 \text{ rad/s} \tag{2.38}$$

e

$$\zeta = \frac{\sigma}{\omega_n} = \frac{2{,}1}{4168{,}6} = 5{,}04\text{x}10^{-4} \tag{2.39}$$

Para que o sistema dinâmico seja estável, todos os autovalores devem ter a parte real negativa. Isto equivale dizer que os pólos do sistema devem estar localizados na parte esquerda do plano-s. Da Figura 2.13, nota-se que quatro dos pólos estão no semiplano esquerdo, e que um dos pólos está localizado na origem. Isto significa que uma entrada degrau resulta em uma saída do tipo rampa, como se pode observar na Figura 2.14.

Figura 2.14 – Resposta do sistema em malha aberta a uma excitação do tipo degrau



2.9. CONCLUSÃO

Neste capítulo foi apresentado uma síntese dos conceitos básicos e fundamentais sobre modelagem de sistemas e em seguida foi obtido um modelo matemático para um dos eixos de uma mesa XY, a qual está presente em diversos tipos de máquinas-ferramenta e tem a função de posicionar adequadamente a peça para o trabalho de usinagem. Foi obtida a função de transferência do sistema assim como a representação por espaço de estados. Utilizando a função de transferência de malha aberta do sistema, foram determinados os pólos, a frequência natural e o fator de amortecimento do sistema.

A fim de melhorar o desempenho do sistema de posicionamento em máquinas-ferramenta para torná-la apta a executar usinagens com maior exatidão, técnicas de controle devem ser implementadas. No capítulo 3 são implementados controladores proporcional, proporcional-derivativo, proporcional-integral, proporcional-integral-derivativo e será utilizada a técnica de imposição de pólos.

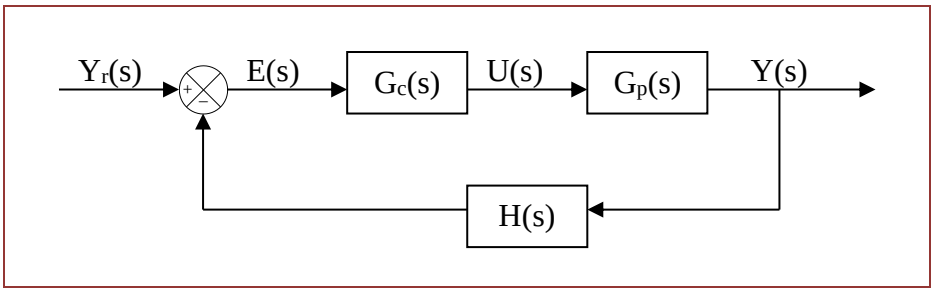
CAPÍTULO

03 Projeto de controladores

3.1. INTRODUÇÃO

O controlador é um dispositivo eletrônico, mecânico ou combinação de ambos que tem por objetivo controlar um sistema através da comparação do valor real da grandeza de saída do sistema com o valor desejado para esta grandeza, dessa comparação é determinado um erro e produzido um sinal de controle que reduzirá este erro a um valor nulo ou a um valor próximo a zero. A classificação dos tipos de controladores é determinada pela ação de controle, ou seja, os controladores são denominados pela forma em que é produzido o sinal de controle. Os controladores, geralmente, são apresentados por estruturas em cascata com o compensador colocado em série com a planta do sistema, conforme é apresentado na Figura 3.1, de modo alternativo um compensador também pode ser colocado no ramo de realimentação. Neste capítulo são projetados controladores com estrutura em cascata dos tipos proporcional (P), proporcional-derivativo (PD), proporcional-integral (PI) e proporcional-integral-derivativo (PID) para o sistema de um dos eixos da mesa XY. A técnica de projeto de sistemas de controle via imposição de pólos também será utilizada.

Figura 3.1 – Sistema de controle em malha fechada com compensador em série



em que,

$Y_r(s)$ – Entrada de referência;

$E(s)$ – Sinal de erro;

$G_c(s)$ – Função de transferência do compensador;

$U(s)$ – Variável de controle;

$G_p(s)$ – Função de transferência de malha aberta da planta;

$Y(s)$ – Saída do sistema de controle.

$H(s)$ – Função de transferência do ramo de realimentação do sistema

O projeto de controladores convencionais (P, PD, PI, PID) pode ser realizado utilizando-se o método do lugar das raízes, o método de resposta em frequência e o critério de estabilidade de Routh-Hurtwitz (PHILLIPS & HARBOR, 1996 e OGATA, 1998). Os controladores convencionais são projetados para o modelo linear do sistema, usando-se o critério de estabilidade de *Rourh*, as especificações de desempenho impostas ao sistema e o limite da tensão de alimentação do motor. Este critério foi utilizado por Riul (2000) e Poel (2000) para posicionamento em um sistema hidráulico. O projeto via imposição de pólos, é realizado fazendo uso de uma realimentação de estados (PHILLIPS & HARBOR, 1996, OGATA, 1998 e CHEN, 1999).

O critério de Routh fornece informação sobre a estabilidade absoluta do sistema, isto é, se o mesmo é estável ou instável. Com o critério de Routh, usando-se a equação característica, que é o denominador da função de transferência de malha fechada do sistema com controlador, determina-se o valor do ganho ou dos ganhos, dependendo do tipo de controlador, para o limite de estabilidade. Uma vez determinada à faixa de ganhos que garante a estabilidade do sistema, um conjunto de simulações é realizado para efetuar-se o ajuste dos melhores ganhos, para que as especificações de desempenho sejam obedecidas bem como o limite da tensão de alimentação do motor. Com essas simulações, que são feitas no domínio do tempo, determinam-se os valores exatos dos ganhos dos controladores e chega-se ao final do projeto.

3.2. ESPECIFICAÇÕES DE DESEMPENHO DO SISTEMA

Os sistemas de controle projetados quando implementados ao sistema de posicionamento devem apresentar: uma alta robustez, de forma a assegurar um bom desempenho diante de mudanças nos parâmetros da mesa, devido às perturbações provenientes da própria máquina e do meio externo; um erro de posição mínimo no regime estacionário; e sobre-sinal nulo. Para que isto ocorra, os sistemas de controle devem obedecer as seguintes especificações de desempenho:

1. Sobre-sinal: Nulo
2. Tempo de acomodação: 5s
3. Margem de Fase: $\geq 50^{o}$
4. Margem de ganho : $\geq 20\text{dB}$

Os valores dos requisitos de margem de fase e de ganho foram usados por Rao & Ro (1995), os requisitos de sobre-sinal e tempo de acomodação são indicados pela literatura.

A variável de controle u(t), no sistema em estudo, corresponde à tensão de alimentação do amplificador de potência, que por sua vez aciona o motor de corrente contínua, que segundo Lacerda (1998) possui uma tensão de alimentação máxima de 48V. O ganho do amplificador de potência é igual a 16, como pode ser verificado na Tabela 2.1 (pág. 35), sendo assim, u(t) é fisicamente limitado em 3V e torna-se mais um parâmetro a ser avaliado no projeto dos controladores, ou seja, se um controlador apresentar uma excelente resposta a uma entrada de referência, mas necessitar de um valor de u(t) que exceda 3V, não deverá ser utilizado na prática, caso isto ocorra, o motor de acionamento da mesa XY será danificado.

3.3. CONTROLADOR PROPORCIONAL

Para um controlador proporcional (P), a relação entre a saída do controlador u(t) e o sinal de erro e(t) é dada por:

$$u(t) = K_p e(t) \tag{3.1}$$

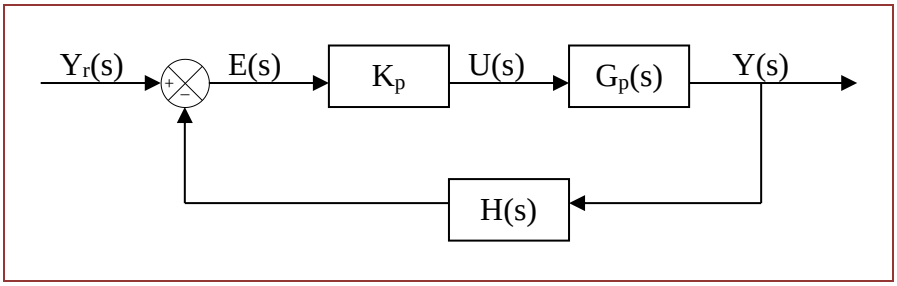
aplicando-se a transformada de Laplace na Equação 3.1, tem-se:

$$G_c(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K_p \tag{3.2}$$

onde K_p é denominado ganho proporcional.

Observa-se na Equação 3.2 que o controlador proporcional trata-se de um sistema de ordem 0, cuja função de transferência é uma constante, o qual opera essencialmente como um amplificador com ganho ajustável, sendo assim, segundo Phillips & Harbor (1996), este compensador é usado em situações em que se pode obter resultados satisfatório para a resposta transitória e em regime estacionário simplesmente pelo ajuste do ganho do sistema, sem necessidade de uma compensação dinâmica (adição de pólos e/ou zeros no sistema). O diagrama de blocos para o sistema com controlador proporcional é apresentado na Figura 3.2.

Figura 3.2 – Diagrama de blocos de um sistema com controlador proporcional



No projeto de um sistema de controle para posicionamento é essencial que a estabilidade deste sistema seja assegurada. A avaliação da estabilidade de um sistema linear pode ser feita pela localização dos pólos do sistema a malha fechada no plano S. Se todos os pólos estiverem situados no semiplano esquerdo, a resposta transitória termina por alcançar um equilíbrio, caracterizando um *sistema estável*, caso ocorra de pelo menos um dos pólos localiza-se no semiplano direito, a resposta transitória oscila no decorrer do tempo com amplitude crescente, caracterizando um *sistema instável*. Para determinar o valor para K_p será utilizado o critério de estabilidade de Routh, através deste critério será possível encontrar uma faixa de valores para K_p que localizam os pólos do sistema a malha fechada no semiplano esquerdo do plano S.

Para se utilizar o critério de estabilidade de Routh, é necessário encontrar a função de transferência à malha fechada para o sistema de um dos eixos da mesa XY. Da Figura 3.2, tem-se:

$$G_{ma}(s) = K_p G_p(s) H(s) \tag{3.3}$$

e

$$G_{mf}(s) = \frac{K_p G_p(s)}{1 + K_p G_p(s) H(s)} \tag{3.4}$$

em que, G_{ma} é a função de transferência a malha aberta e G_{mf} é a função de transferência a malha fechada para o sistema com controlador proporcional.

Substituído a Equação 2.37 nas Equações 3.3 e 3.4 e considerando que realimentação possui valor unitário, tem-se:

$$G_{ma}(s) = \frac{(5,35x10^{-9}s + 0,28)K_p}{1,5x10^{-12}s^5 + 2,02x10^{-9}s^4 + 2,64x10^{-5}s^3 + 3,49x10^{-2}s^2 + 4,62s} \tag{3.5}$$

e

$$G_{mf}(s) = \frac{(5,35x10^{-9}s + 0,28)K_p}{1,5x10^{-12}s^5 + 2,02x10^{-9}s^4 + 2,64x10^{-5}s^3 + 3,49x10^{-2}s^2 + \ldots} \ldots \tag{3.6}$$

$$\ldots \overline{+(4,62 + 5,35x10^{-9}K_p)s + 0,28K_p}$$

Seguindo o procedimento para análise da estabilidade pelo critério de Routh segundo Ogata (1998), a partir da função de transferência a malha fechada do sistema, apresentada na Equação 3.6, deve-se obter a equação característica do sistema, reescrevendo da seguinte forma:

$$a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_{n-1} s + a_n = 0 \tag{3.7}$$

em que,

a — Coeficientes da equação característica

n — Ordem da equação característica

Em seguida deve-se arranjar os coeficientes da equação característica em linhas e colunas de acordo com o seguinte padrão:

Tabela 3.1- Arranjo dos coeficientes da equação característica para análise da estabilidade pelo critério de Routh

s^n	a_0	a_2	a_4	a_6	...
s^{n-1}	a_1	a_3	a_5	a_7	...
s^{n-2}	b_1	b_2	b_3	b_4	...
s^{n-3}	c_1	c_2	c_3	c_4	...
s^{n-4}	d_1	d_2	d_3	d_4	...
.	.	.			
.	.	.			
.	.	.			
s^2	e_1	e_2			
s^1	f_1				
s^0	g_1				

Os coeficientes b_1, b_2, b_3 e assim por diante são calculados como a seguir:

$$b_1 = \frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_1}; \qquad b_2 = \frac{a_1 a_4 - a_0 a_5}{a_1}; \qquad b_3 = \frac{a_1 a_6 - a_0 a_7}{a_1}; \ldots$$

O cálculo dos b's continua até que os restos sejam todos nulos. O mesmo padrão de multiplicação em cruz dos coeficientes das linhas anteriores é seguido para calcular os c's, d's, e's etc, ou seja,

$$c_1 = \frac{b_1 a_3 - a_1 b_2}{b_1}; \qquad c_2 = \frac{b_1 a_5 - a_1 b_3}{b_1}; \qquad c_3 = \frac{b_1 a_7 - a_1 b_4}{b_1}; \ldots$$

e

$$d_1 = \frac{c_1 b_2 - b_1 c_2}{c_1}; \qquad d_2 = \frac{c_1 b_3 - b_1 c_3}{c_1}; \ldots$$

Este processo continua até que a *n*-ésima linha tenha sido completada.

O critério de estabilidade de Routh diz que o número de raízes da equação característica de malha fechada do sistema com partes reais positivas é igual ao número de mudanças de sinal dos coeficientes da primeira coluna da Tabela 3.1. Portanto, a condição necessária e suficiente para que todas as raízes fiquem no semiplano esquerdo do plano S, é que todos os termos da primeira coluna da tabela possuam sinais positivos.

Sendo assim, da Equação 3.6, tem-se que a equação característica do sistema que representa um dos eixos da mesa XY com controlador proporcional é apresentada pela Equação 3.8.

$$1{,}5\text{x}10^{-12}s^5 + 2{,}02\text{x}10^{-9}s^4 + 2{,}64\text{x}10^{-5}s^3 + 3{,}49\text{x}10^{-2}s^2 + (4{,}62 + 5{,}35\text{x}10^{-9}K_p)s + 0{,}28K_p = 0 \qquad (3.8)$$

e o arranjo de coeficientes para análise de estabilidade pelo critério de Routh, é apresentado na Tabela 3.2.

Tabela 3.2- Coeficientes da equação característica do sistema para análise da estabilidade pelo critério de Routh no projeto de um controlador P

s^5	$1{,}5x10^{-12}$	$2{,}64x10^{-5}$	$4{,}62 + 5{,}35x10^{-9}K_p$
s^4	$2{,}02x10^{-9}$	$3{,}49x10^{-2}$	$0{,}28K_p$
s^3	$4{,}84x10^{-7}$	$4{,}62 - 2{,}0792x10^{-4}K_p$	
s^2	$0{,}0156 + 8{,}6748x10^{-7}K_p$	$0{,}28K_p$	
s^1	$- 2{,}0792x10^{-4}K_p + 4{,}62$		
s^0	$0{,}28K_p$		

e para que todas as raízes da Equação 3.8 fiquem no semiplano esquerdo do plano S, duas condições devem ser satisfeitas:

i. $0{,}0156K_p + 8{,}6748 > 0 \Rightarrow K_p > -17983{,}12$

ii. $-2{,}0792x10^{-4}K_p + 4{,}2 > 0 \Rightarrow K_p < 22220$

iii. $0{,}28K_p > 0 \Rightarrow K_p > 0$

Sendo assim, o valor de K_p, para o sistema ser estável, deve, então, estar no seguinte intervalo:

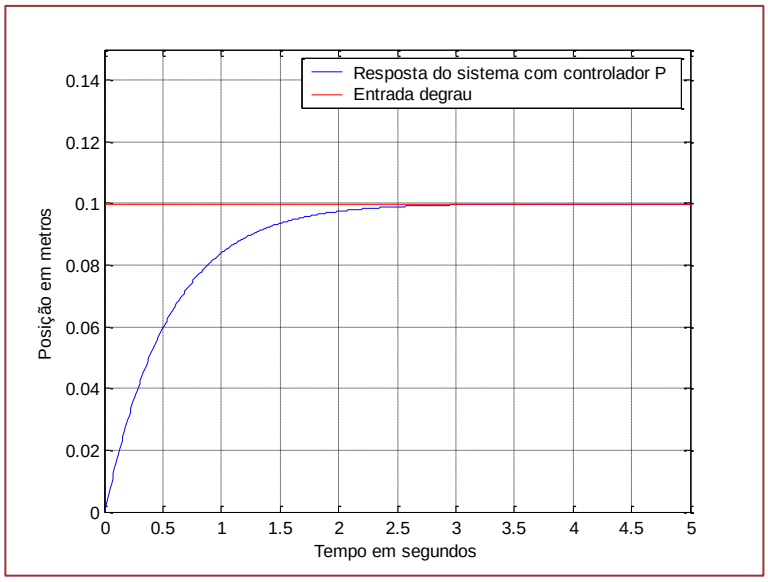
$$0 < K_p < 22220 \qquad (3.9)$$

Para obtenção do valor adequado para o ganho proporcional, foram feitas simulações com diferentes valores de K_p entre o intervalo indicado em 3.9. Levando-se em consideração a resposta do sistema à uma função degrau e valor da variável de controle, que não deverá ultrapassar 3 V, como mencionado na seção 3.2, concluiu-se que o valor adequado para K_p é:

$$K_p = 30 \qquad (3.10)$$

A resposta do sistema a uma entrada degrau de amplitude 0,1m com o controlador proporcional de ganho $K_p = 30$ é indicado na Figura 3.3.

Figura 3.3 – Resposta y(t) do sistema com controlador proporcional a uma entrada degrau



A variável de controle u(t) em função do tempo está apresenta na Figura 3.4, assim como o gráfico do lugar das raízes e o diagrama de Bode, indicando as margens de fase e de ganho, são apresentados, respectivamente, nas Figuras 3.5 e 3.6.

Figura 3.4 – Variável de controle u(t) do sistema com controlador P

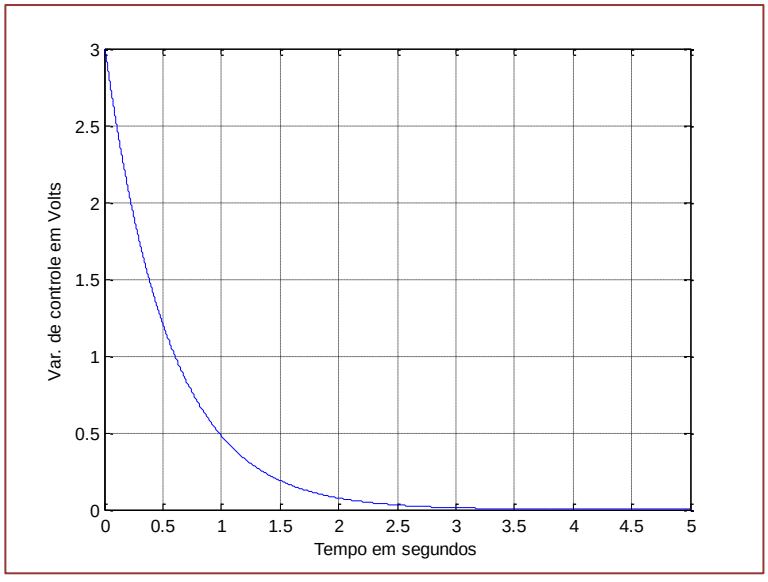
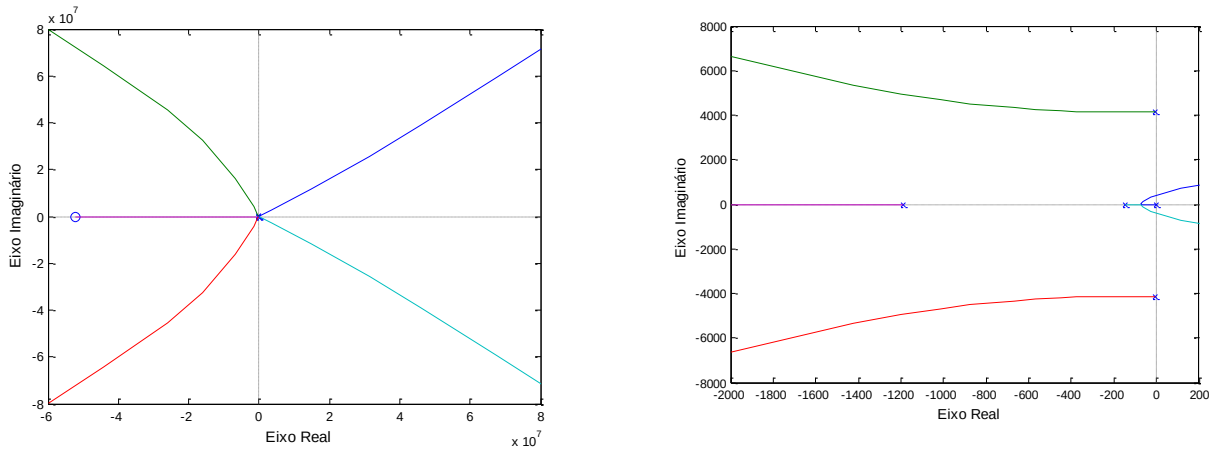


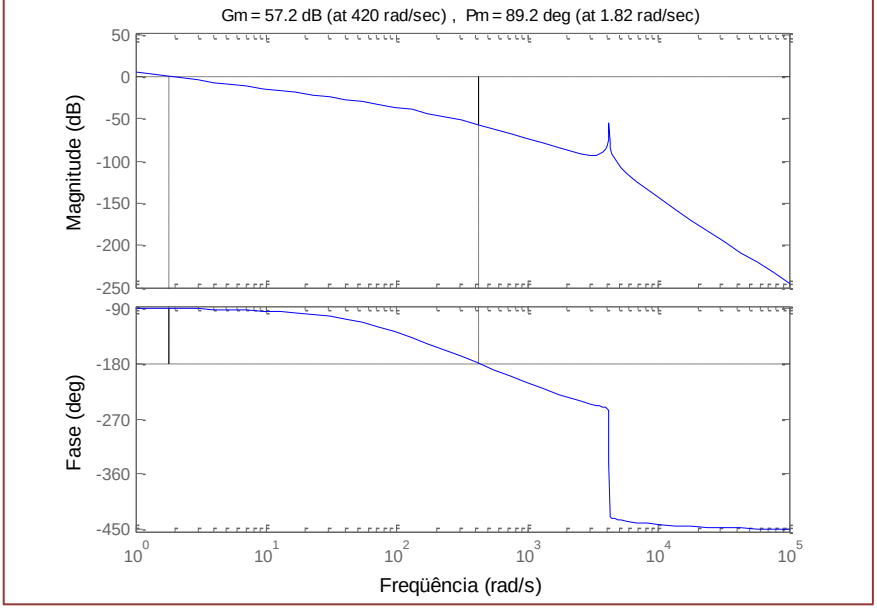
Figura 3.5 – (a) Lugar das raízes do sistema com controlador P; (b) Ampliação da Figura 3.5(a)



(a) (b)

Nas Figuras 3.3, 3.4 e 3.6, pode-se constatar, respectivamente, que o sistema com o controlador proporcional apresentou um tempo de acomodação de 2,94s, sobre-sinal nulo, valor máximo para variável de controle de 3V, margem de ganho de 57,2dB e margem de fase de 89,2°. Diante desses valores pode-se concluir que as especificações de desempenho foram todas atingidas.

Figura 3.6 – Diagrama de Bode do sistema com controlador P



Um outro parâmetro a ser analisado é o erro de posição no regime estacionário, o qual é obtido a partir dos coeficientes de erro estático de *posição* e *velocidade*. O termo

erro de posição é usado para designar o erro estacionário a uma entrada degrau, enquanto que o termo erro de velocidade é relacionado ao erro estacionário a uma entrada do tipo rampa, ou seja, o erro de velocidade não é um erro na velocidade, mas um erro na posição devido a uma entrada rampa. Segundo Ogata (1998), o erro de posição (e_{ssp}), ou erro estacionário para uma entrada degrau, é:

$$e_{ssp} = \frac{1}{1+k_p} \tag{3.11}$$

em que k_p é o coeficiente de erro estático de posição, definido por:

$$k_p = \lim_{s\to 0} G(s) = G(0) \tag{3.12}$$

Assim o erro estacionário do sistema de um dos eixos da mesa XY para uma entrada degrau é nulo. Pode-se concluir isto, devido a Equação 3.5 tratar-se de um sistema do tipo 1 (sistema que apresenta um pólo na origem), fazendo com que o coeficiente de erro estático de posição tenda para o infinito (Equação 3.12), e, consequentemente, anule o erro de posição (Equação 3.11).

3.4. CONTROLADOR PROPORCIONAL-DERIVATIVO

A ação de controle de um controlador proporcional-derivativo (PD) é definida pela seguinte equação:

$$u(t) = K_p e(t) + K_d \frac{de(t)}{dt} \tag{3.13}$$

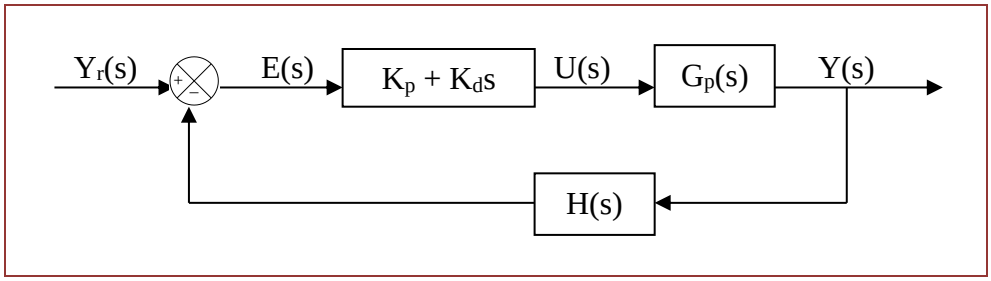
e a função de transferência é:

$$G_c = \frac{U(s)}{E(s)} = K_p + K_d s = K_d\left(s + \frac{K_p}{K_d}\right) \tag{3.14}$$

em que K_p é o ganho proporcional e K_d é o ganho derivativo.

Observa-se na Equação 3.14 que o controlador proporcional-derivativo introduz um único zero em $s = -K_p/K_d$. O controlador PD não altera a ordem do sistema, entretanto tende a deslocar o lugar das raízes para esquerda no plano S, isto é, em direção a uma região mais estável. Portanto, este controlador melhora a resposta transitória do sistema pelo aumento da estabilidade. Embora o controlador derivativo não afete diretamente o erro em regime estacionário, ele introduz amortecimento no sistema e, portanto, permite o uso de um valor maior do ganho K_p, o que resulta em um menor erro em regime estacionário. O diagrama de blocos para o sistema com controlador proporcional-derivativo é apresentado na Figura 3.7.

Figura 3.7 – Diagrama de blocos de um sistema com controlador proporcional-derivativo



Para se utilizar o critério de estabilidade de Routh, é necessário encontrar a função de transferência à malha fechada para o sistema de um dos eixos da mesa XY com controlador PD. Da Figura 3.7, tem-se:

$$G_{ma}(s) = (K_p + K_d s)G_p(s)H(s) \tag{3.15}$$

e

$$G_{mf}(s) = \frac{(K_p + K_d s)G_p(s)}{1 + (K_p + K_d s)G_p(s)H(s)} \tag{3.16}$$

Substituído a Equação 2.37 nas Equações 3.15 e 3.16 e considerando que realimentação possui valor unitário, tem-se:

$$G_{ma}(s) = \frac{(5,35x10^{-9}s + 0,28)(K_p + K_d s)}{1,5x10^{-12}s^5 + 2,02x10^{-9}s^4 + 2,64x10^{-5}s^3 + 3,49x10^{-2}s^2 + 4,62s} \tag{3.17}$$

e

$$G_{mf}(s) = \frac{5,35x10^{-9}K_d s^2 + (5,35x10^{-9}K_p + 0,28K_d)s + 0,28K_p}{1,5x10^{-12}s^5 + 2,02x10^{-9}s^4 + 2,64x10^{-5}s^3 + (3,49x10^{-2} + 5,35x10^{-9}K_d)s^2 + \ldots} \tag{3.18}$$

$$\ldots \overline{+(4,62 + 5,35x10^{-9}K_p + 0,28K_d)s + 0,28K_p}$$

A partir dos coeficientes da equação característica do sistema em malha fechada, elabora-se a Tabela 3.3, para utilização do método de Routh.

Tabela 3.3- Coeficientes da equação característica do sistema para análise da estabilidade pelo critério de Routh no projeto de um controlador PD

s^5	$1{,}5x10^{-12}$	$2{,}64x10^{-5}$	$4{,}62 + 5{,}35x10^{-9}K_p + 0{,}28K_p$
s^4	$2{,}02x10^{-9}$	$3{,}49x10^{-2} + 5{,}35x10^{-9}K_d$	$0{,}28K_p$
s^3	$- 3{,}97x10^{-12}K_d + 4{,}84x10^{-7}$		$4{,}62 - 2{,}08x10^{-4}K_p + 0{,}28Kd$
s^2	$\frac{-2{,}13x10^{-20}K_d^2 - 5{,}66x10^{-10}K_d + 4{,}2x10^{-13}K_p + 7{,}56x10^{-9}}{-3{,}97x10^{-12}K_d + 4{,}84x10^{-7}}$		$0{,}28K_p$
s^1	$\frac{-5{,}95x10^{-21}K_d^3 - 1{,}58x10^{-10}K_d^2 - 4{,}95x10^{-10}K_d + 3{,}49x10^{-8}}{-2{,}13x10^{-20}K_d^2 - 5{,}66x10^{-10}K_d + 4{,}2x10^{-13}K_p + 7{,}56x10^{-9}} + \frac{(-8{,}73x10^{-17}K_p - 4x10^{-28}K_d^2 + 2{,}35x10^{-13}K_d + 3{,}02x10^{-13})K_p}{-2{,}13x10^{-20}K_d^2 - 5{,}66x10^{-10}K_d + 4{,}2x10^{-13}K_p + 7{,}56x10^{-9}}$		
s^0	$0{,}28K_p$		

Para ter-se estabilidade, segundo critério de Routh, é necessário que:

i. $-3{,}97x10^{-12}K_d + 4{,}84x10^{-7} > 0 \Rightarrow K_d < 121869$

ii. $K_p > 5{,}06x10^{-8}K_d^2 + 1346{,}73K_d - 18011{,}57$

iii. $K_p > \frac{5{,}95x10^{-21}K_d^3 + 1{,}58x10^{-10}K_d^2 + 4{,}95x10^{-10}K_d - 3{,}49x10^{-8}}{-8{,}73x10^{-17}K_p - 4x10^{-28}K_d^2 + 2{,}35x10^{-13}K_d + 3{,}02x10^{-13}}$

iv. $0{,}28K_p > 0 \Rightarrow K_p > 0$

Para obtenção dos valores dos ganhos proporcional e derivativo que atenda o limite da variável de controle e as especificações de desempenho impostas pela seção 3.2, foram feitas simulações com diferentes valores para K_p e K_d, observando-se as quatro desigualdades acima são satisfeitas e levando-se em consideração a resposta do sistema a uma função degrau. Concluiu-se que os valores adequados para K_p e K_d são:

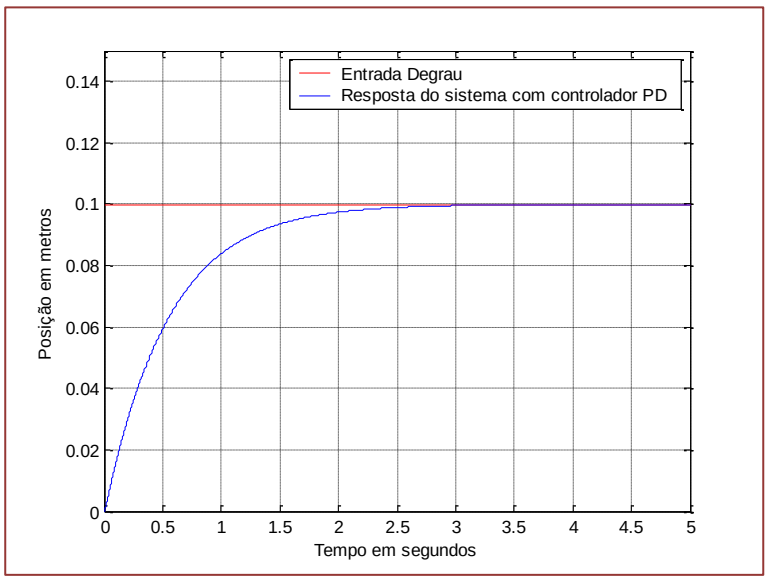
$$K_p = 30 \quad (3.19)$$

$$K_d = 0{,}01 \quad (3.20)$$

O valor do ganho proporcional, mesmo com introdução do amortecimento proporcionado pela ação derivativa, não foi possível ser aumentado. Isso ocorreu devido ao sistema possuir limitação em sua variável de controle, que não deverá ultrapassar 3V.

A resposta a uma entrada degrau de amplitude 0,1m e a variável de controle do sistema com controlador PD estão apresentados nas Figuras 3.8 e 3.9, respectivamente. Na Figura 3.10 pode-se ver o lugar das raízes e na Figura 3.12 o diagrama de Bode.

Figura 3.8 – Resposta y(t) do sistema com controlador PD a uma entrada degrau



O sistema com controlador proporcional-derivativo apresentou um tempo de acomodação de 2,94s, sobre-sinal nulo, valor máximo para variável de controle de 3V, margem de ganho de 62,3 dB e margem de fase de 89,2°. Com esses valores, o sistema projetado alcança todas as especificações de desempenho requeridas.

Figura 3.9 – Variável de controle u(t) do sistema com controlador PD

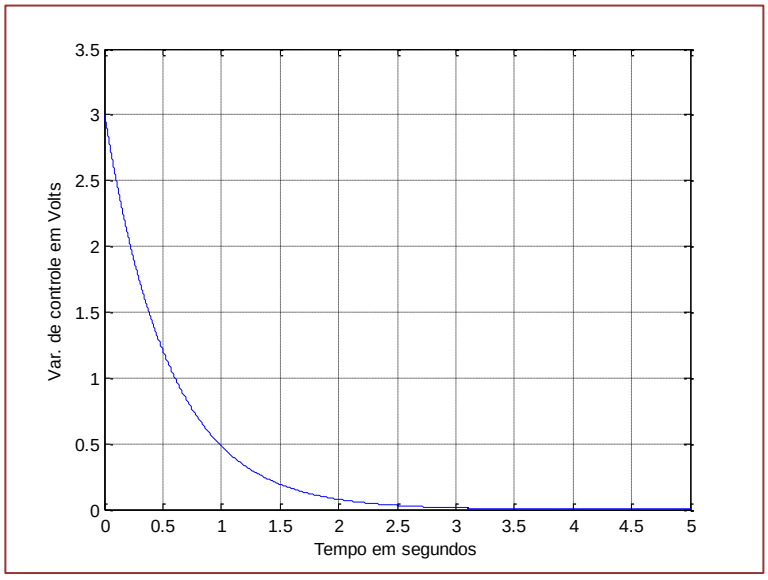


Figura 3.10 – Lugar das raízes do sistema com controlador PD

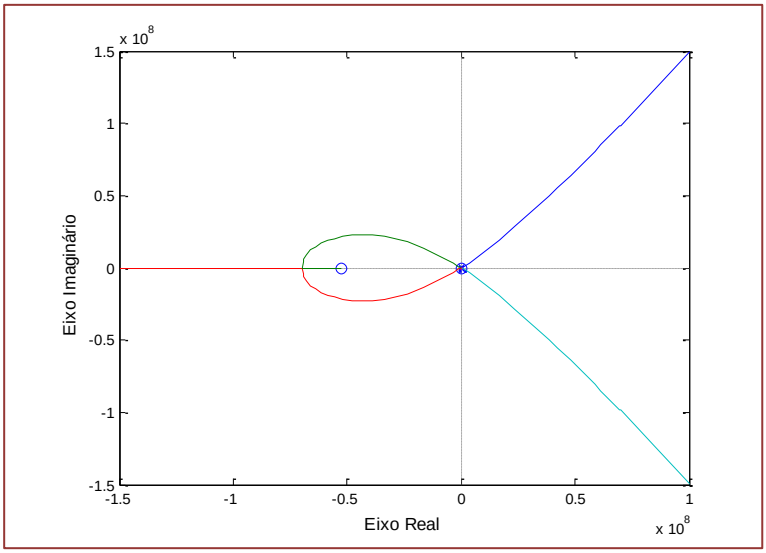


Figura 3.11 – Ampliação da Figura 3.10

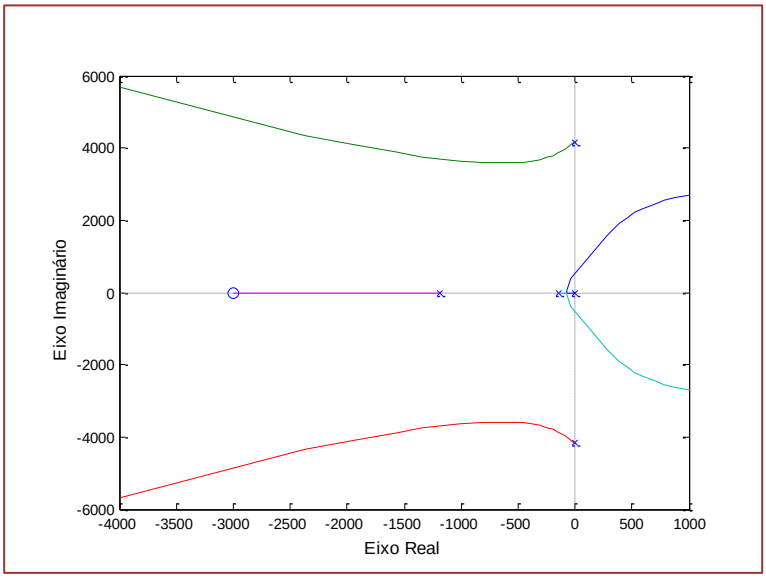
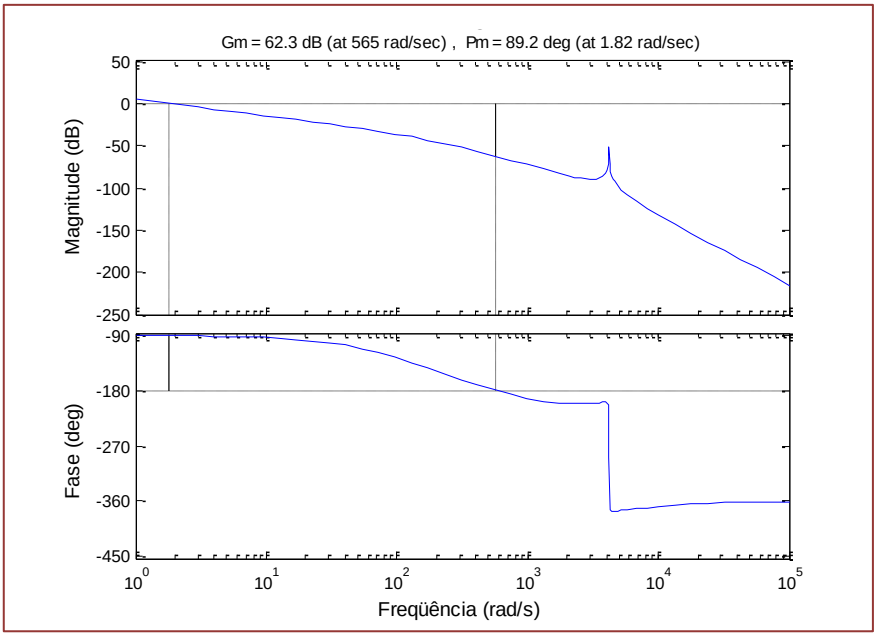


Figura 3.12 – Diagrama de Bode do sistema com controlador PD



3.5. CONTROLADOR PROPORCIONAL-INTEGRAL

A ação de controle de um controlador proporcional-integral é definida pela Equação 3.21.

$$u(t) = K_p e(t) + K_i \int_0^t e(t)dt \qquad (3.21)$$

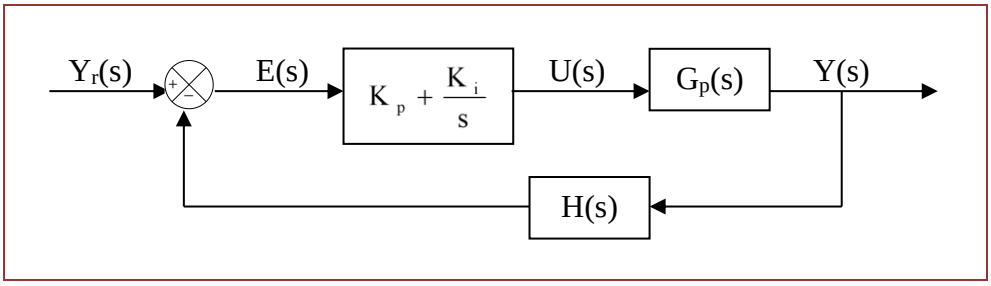
aplicando-se a transformada de Laplace na Equação 3.21, tem-se:

$$G_c(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K_p + \frac{K_i}{s} = \frac{K_p s + K_i}{s} = \frac{K_p(s + K_i / K_p)}{s} \qquad (3.22)$$

em que K_p é o ganho proporcional e K_i é o ganho integral.

O controlador proporcional-integral é usado para melhorar a resposta em regime estacionário. Pode-se observar na Equação 3.22, que este controlador adiciona ao sistema um zero em $-K_i / K_p$ e um pólo na origem, o que acarreta num aumento do tipo do sistema em uma unidade. No caso de um sistema do tipo 0, esse passaria a ser do tipo 1 com a implementação de um controlador PI, resultando em um erro estacionário para uma entrada degrau nulo. O diagrama de blocos para o sistema com controlador proporcional-integral é apresentado na Figura 3.13.

Figura 3.13 – Diagrama de blocos de um sistema com controlador proporcional-integral



Para utilizar-se o critério de Routh, será encontrada a função de transferência de malha fechada do sistema representado na Figura 3.13.

A função de transferência de malha aberta do sistema é dada por:

$$G_{ma}(s) = \left(K_p + \frac{K_i}{s}\right) G_p(s) H(s) \tag{3.23}$$

e a função de transferência de malha fechada é da forma:

$$G_{mf}(s) = \frac{\left(K_p + \frac{K_i}{s}\right) G_p(s)}{1 + \left(K_p + \frac{K_i}{s}\right) G_p(s) H(s)} \tag{3.24}$$

Substituído a Equação 2.37 nas Equações 3.23 e 3.24 e considerando que realimentação possui valor unitário, tem-se:

$$G_{ma}(s) = \frac{(5,35x10^{-9}s + 0,28)(K_p + \frac{K_i}{s})}{1,5x10^{-12}s^5 + 2,02x10^{-9}s^4 + 2,64x10^{-5}s^3 + 3,49x10^{-2}s^2 + 4,62s}$$

$$G_{ma}(s) = \frac{5,35x10^{-9}K_p s^2 + (0,28K_p + 5,35x10^{-9}K_i)s + 0,28K_i}{1,5x10^{-12}s^6 + 2,02x10^{-9}s^5 + 2,64x10^{-5}s^4 + 3,49x10^{-2}s^3 + 4,62s^2} \tag{3.25}$$

e

$$G_{mf}(s) = \frac{5,35x10^{-9}K_p s^2 + (0,28K_p + 5,35x10^{-9}K_i)s + 0,28K_i}{1,5x10^{-12}s^6 + 2,02x10^{-9}s^5 + 2,64x10^{-5}s^4 + 3,49x10^{-2}s^3 + \ldots} \ldots$$

$$\ldots \frac{}{+(4,62 + 5,35x10^{-9}K_p)s^2 + (0,28K_p + 5,35x10^{-9}K_i)s + 0,28K_i} \tag{3.26}$$

Com os coeficientes do denominador da Equação 3.26, elabora-se a Tabela 3.4, necessário à aplicação do critério de Routh.

Tabela 3.4- Coeficientes da equação característica do sistema para análise da estabilidade pelo critério de Routh no projeto de um controlador PI

s^6	$1{,}5x10^{-12}$	$2{,}64x10^{-5}$	$4{,}62 + 5{,}35x10^{-9}K_p$	$0{,}28K_i$
s^5	$2{,}02x10^{-9}$	$3{,}49x10^{-2}$	$0{,}28K_p + 5{,}35x10^{-9}K_i$	
s^4	$4{,}84x10^{-7}$	$4{,}62 - 2{,}08x10^{-4}K_p - 3{,}97x10^{-12}K_i$		$0{,}28K_i$
s^3	$1{,}56x10^{-2} + 8{,}68x10^{-7}K_p + 1{,}66x10^{-14}K_i$	$0{,}28K_p - 1{,}17x10^{-3}K_i$		
s^2	$\frac{-6{,}59x10^{-26}K_i^2 + 5{,}66x10^{-10}K_i + 7{,}22x10^{-2}}{1{,}56x10^{-2} + 8{,}68x10^{-7}K_p + 1{,}658x10^{-14}K_i} + \frac{(-1{,}8x10^{-10}K_p - 6{,}89x10^{-18}K_i + 6{,}26x10^{-7})K_p}{1{,}56x10^{-2} + 8{,}68x10^{-7}K_p + 1{,}658x10^{-14}K_i}$			$0{,}28K_i$
s^1	$\frac{-5{,}05x10^{-11}K_p^3 + 1{,}75x10^{-7}K_p^2 + 0{,}0202K_p - (2{,}11x10^{-13}K_p^2 + 7{,}43x10^{-9}K_p)K_i}{(-1{,}8x10^{-10}K_p - 6{,}89x10^{-18}K_i + 6{,}26x10^{-7})K_p - 6{,}59x10^{-26}K_i^2 + 5{,}66x10^{-10}K_i + 7{,}22x10^{-2}} - \frac{(7{,}68x10^{-29}K_i^2 + 1{,}45x10^{-6}K_i + 8{,}05x10^{-21}K_iK_p + 6{,}83x10^{-5})K_i}{(-1{,}8x10^{-10}K_p - 6{,}89x10^{-18}K_i + 6{,}26x10^{-7})K_p - 6{,}59x10^{-26}K_i^2 + 5{,}66x10^{-10}K_i + 7{,}22x10^{-2}}$			
s^0	$0{,}28K_i$			

Para o sistema com controlador PI ser estável, pelo critério de Routh, os termos da primeira coluna da Tabela 3.4 devem ser positivos. Assim, quatro condições devem ser satisfeitas:

i. $K_p > -1{,}91x10^{-8}K_i - 17972{,}35$

ii. $K_p > \frac{6{,}59x10^{-26}K_i^2 - 5{,}66x10^{-10}K_i - 7{,}22x10^{-2}}{-1{,}8x10^{-10}K_p - 6{,}89x10^{-18}K_i + 6{,}26x10^{-7}}$

iii. $K_i < \frac{-5{,}05x10^{-11}K_p^3 + 1{,}75x10^{-7}K_p^2 + 0{,}0202K_p}{2{,}11x10^{-13}K_p^2 + 7{,}43x10^{-9}K_p + 7{,}68x10^{-29}K_i^2 + \ldots} \ldots$

$\ldots \overline{+1{,}45x10^{-6}K_i + 8{,}05x10^{-21}K_iK_p + 6{,}83x10^{-5}}$

iv. $K_i > 0$

Pode-se encontrar K_i e K_p variando seus valores e, ao mesmo tempo, observando-se as quatro desigualdades acima são satisfeitas. Para os valores de K_i e K_p que satisfazem as condições impostas, verifica-se a resposta do sistema. O conjunto de ganhos adequados será aquele correspondente à resposta do sistema, obtida através de simulação, que atenda as especificações de desempenho e o limite da variável de controle. Os ganhos determinados foram:

$$K_p = 30 \tag{3.27}$$

e

$$K_i = 0{,}001 \tag{3.28}$$

A resposta do sistema com controlador PI a uma entrada degrau de amplitude 0,1m, sua variável de controle u(t), o lugar das raízes e o diagrama de Bode estão mostrados, respectivamente, nas Figuras 3.14, 3.15, 3.16 e 3.18.

Figura 3.14 – Resposta y(t) do sistema com controlador PI a uma entrada degrau

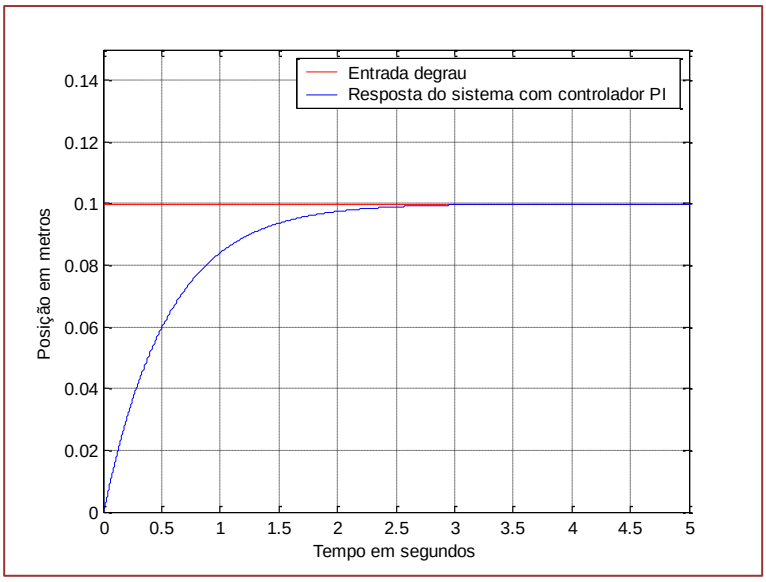


Figura 3.15 – Variável de controle u(t) do sistema com controlador PI

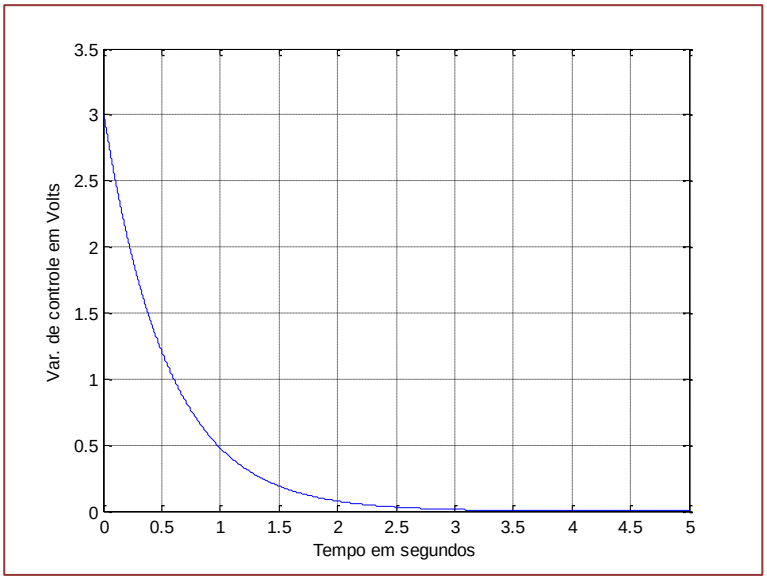


Figura 3.16 – Lugar das raízes do sistema com controlador PI

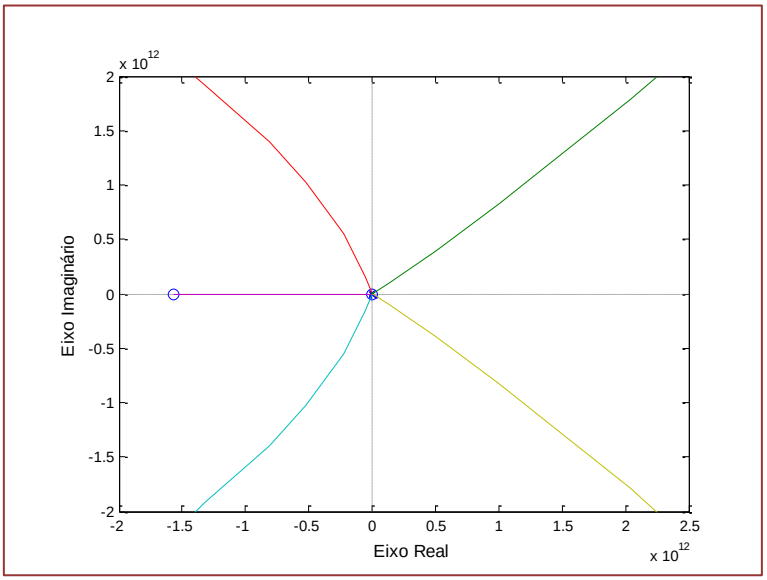


Figura 3.17 – Ampliação da Figura 3.16

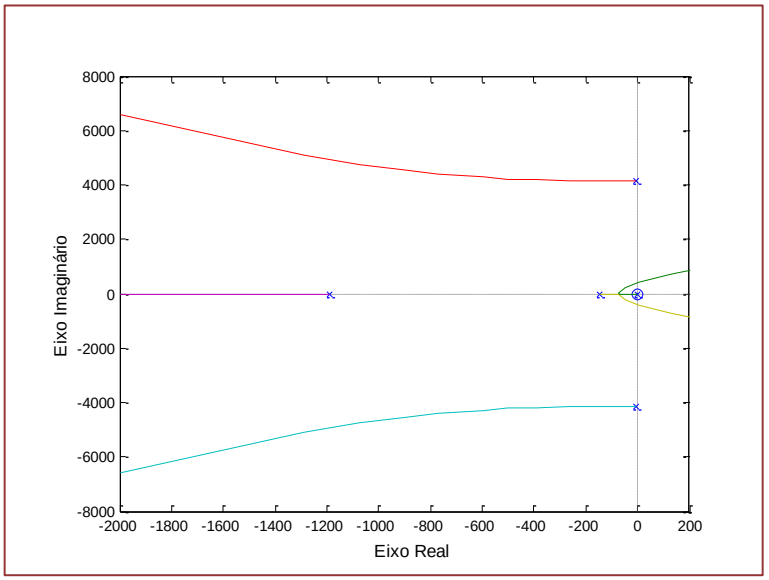
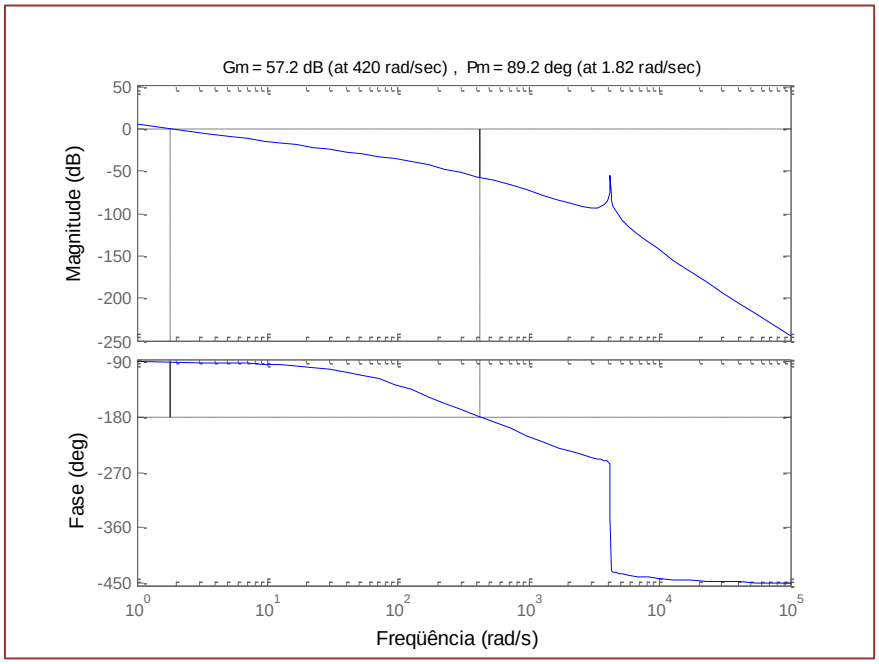


Figura 3.18 – Diagrama de Bode do sistema com controlador PI



As especificações de desempenho foram todas atingidas. A resposta ao degrau não apresenta sobre-sinal e o tempo de acomodação é de 2,94s, abaixo dos 5s desejados. A margem de fase é de 89,2º e a margem de ganho é 57,2 dB. Assim como nos controladores P e PD, o valor máximo atingido pela variável de controle u(t) foi 3V, permanecendo dentro dos limites aceitáveis.

3.6. CONTROLADOR PROPORCIONAL-INTEGRAL-DERIVATIVO

A combinação da ação de controle proporcional, ação de controle integral e ação de controle derivativa é denominada ação de controle proporcional-integral-derivativa (PID). Esta ação combinada possui as vantagens de cada uma das três ações de controle individuais, sendo assim, o controlador PID é aplicado em sistemas de controle em que é necessária a melhora tanto da resposta transitória quanto da resposta em regime estacionário. A equação de um controlador PID é dada por:

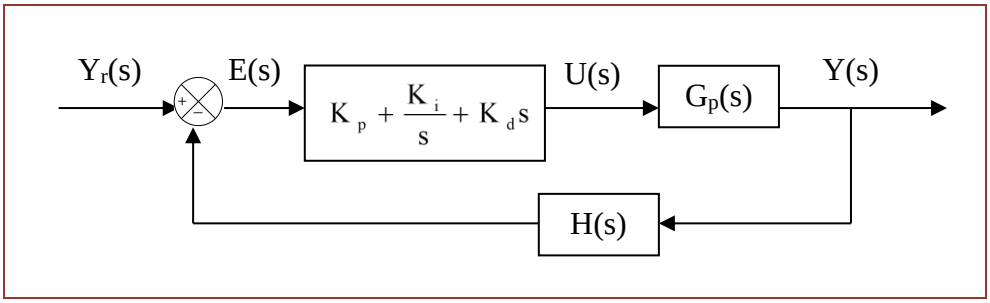
$$u(t) = K_p e(t) + K_i \int_0^t e(t)dt + K_d \frac{de(t)}{dt} \qquad (3.29)$$

ou, usando Laplace,

$$G_c(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K_p + \frac{K_i}{s} + K_d s = \frac{K_d s^2 + K_p s + K_i}{s} \qquad (3.30)$$

Pode-se observar na Equação 3.30 que controlador PID adiciona ao sistema dois zeros e um pólo. O digrama de blocos que representa o sistema com controlador PID pode ser visto na Figura 3.19.

Figura 3.19 – Diagrama de blocos de um sistema com controlador PID



A função de transferência de malha aberta para o sistema da Figura 3.19 é:

$$G_{ma}(s) = \left(K_p + \frac{K_i}{s} + K_d s \right) G_p(s) H(s)$$

$$G_{ma}(s) = \frac{5,35x10^{-9} K_d s^3 + (0,28K_d + 5,35x10^{-9} K_p)s^2}{1,5x10^{-12} s^6 + 2,02x10^{-9} s^5 + 2,64x10^{-5} s^4 + 3,49x10^{-2} s^3 + 4,62s^2} + \\ + \frac{(0,28K_p + 5,35x10^{-9} K_i)s + 0,28K_i}{1,5x10^{-12} s^6 + 2,02x10^{-9} s^5 + 2,64x10^{-5} s^4 + 3,49x10^{-2} s^3 + 4,62s^2} \quad (3.31)$$

Em malha fechada, tem-se:

$$G_{mf}(s) = \frac{\left(K_p + \frac{K_i}{s} + K_d s \right) G_p(s)}{1 + \left(K_p + \frac{K_i}{s} + K_d s \right) G_p(s) H(s)}$$

$$G_{mf}(s) = \frac{5,35x10^{-9} K_d s^3 + (0,28K_d + 5,35x10^{-9} K_p)s^2 + (0,28K_p + 5,35x10^{-9} K_i)s + 0,28K_i}{1,5x10^{-12} s^6 + 2,02x10^{-9} s^5 + 2,64x10^{-5} s^4 + (3,49x10^{-2} + 5,35x10^{-9} K_d)s^3 + \ldots} \ldots \quad (3.32)$$

$$\ldots \frac{}{+(4,62 + 0,28K_d + 5,35x10^{-9} K_p)s^2 + (0,28K_p + 5,35x10^{-9} K_i)s + 0,28K_i}$$

Com os coeficientes da equação característica do sistema em malha fechada, constrói-se a Tabela 3.5, necessária à utilização do critério de Routh.

Tabela 3.5- Coeficientes da equação característica do sistema para análise da estabilidade pelo critério de Routh no projeto de um controlador PID

s^6	$1{,}5\text{x}10^{-12}$	$2{,}64\text{x}10^{-5}$	$4{,}62 + 0{,}28K_d + 5{,}35\text{x}10^{-9}K_p$	$0{,}28K_i$
s^5	$2{,}02\text{x}10^{-9}$	$3{,}49\text{x}10^{-2} + 5{,}35\text{x}10^{-9}K_d$	$0{,}28K_p + 5{,}35\text{x}10^{-9}K_i$	
s^4	$4{,}84\text{x}10^{-7} - 3{,}97\text{x}10^{-12}K_d$	$4{,}62 + 0{,}28K_d - 2{,}08\text{x}10^{-4}K_p - 3{,}97\text{x}10^{-12}K_i$		$0{,}28K_i$
s^3	$\frac{-(5{,}66\text{x}10^{-10} + 2{,}13\text{x}10^{-20}K_d)K_d + 4{,}2\text{x}10^{-13}K_p}{-3{,}97\text{x}10^{-12}K_d + 4{,}84\text{x}10^{-7}} + \frac{8{,}02\text{x}10^{-21}K_i + 7{,}56\text{x}10^{-9}}{-3{,}97\text{x}10^{-12}K_d + 4{,}84\text{x}10^{-7}}$	$\frac{-(5{,}66\text{x}10^{-10} + 2{,}13\text{x}10^{-20}K_d)K_i}{-3{,}97\text{x}10^{-12}K_d + 4{,}84\text{x}10^{-7}} + \frac{(1{,}36\text{x}10^{-7} - 1{,}11\text{x}10^{-12}K_d)K_p}{-3{,}97\text{x}10^{-12}K_d + 4{,}84\text{x}10^{-7}}$		
s^2	$\frac{(-1{,}54\text{x}10^{-38}K_i + 1{,}27\text{x}10^{-43}K_iK_d - 8{,}93\text{x}10^{-33}K_d^2 + 1{,}33\text{x}10^{-35}K_dK_p + 5\text{x}10^{-31}K_d - \ldots}{8{,}44\text{x}10^{-32}K_d^3 + 2{,}25\text{x}10^{-2}K_d^2 - \ldots}$ $\frac{-1{,}62\text{x}10^{-30}K_p + 1{,}33\text{x}10^{-22})K_i + (2{,}36\text{x}10^{-32}K_d^3 + 6{,}29\text{x}10^{-22}K_d^2 - \ldots}{-1{,}67\text{x}10^{-24}K_pK_d - 3{,}19\text{x}10^{-32}K_iK_d - \ldots}$ $\frac{-7{,}57\text{x}10^{-17}K_d - 9{,}33\text{x}10^{-25}K_pK_d + 3{,}47\text{x}10^{-28}K_p^2 + 1{,}14\text{x}10^{-19}K_p - \ldots}{-2{,}74\text{x}10^{-16}K_d + 3{,}88\text{x}10^{-27}K_i + \ldots}$ $\frac{-2{,}41\text{x}10^{-16})K_d + (-4{,}23\text{x}10^{-23}K_p + 1{,}48\text{x}10^{-19})K_p + 1{,}69\text{x}10^{-14} \ldots}{+3{,}66\text{x}10^{-15}}$			$0{,}28K_i$
s^1	$\frac{(-2{,}78\text{x}10^{-36}K_p^2 + 9{,}73\text{x}10^{-33}K_p + 1{,}11\text{x}10^{-27})K_p - (1{,}16\text{x}10^{-38}K_p + 2{,}21\text{x}10^{-36}K_i + \ldots}{+2{,}07\text{x}10^{-24})K_pK_i + (1{,}04\text{x}10^{-55}K_d^5 + 2{,}77\text{x}10^{-45}K_d^4 - 1{,}02\text{x}10^{-39}K_d^3 + 1{,}24\text{x}10^{-34}K_d^2 - \ldots}$ $\frac{-5{,}03\text{x}10^{-30}K_d + 7{,}05\text{x}10^{-41}K_p^2 + 7{,}5\text{x}10^{-33}K_p + 1{,}53\text{x}10^{-51}K_p^2K_d^2 - 1{,}86\text{x}10^{-46}K_p^2K_d + \ldots}{(-3{,}97\text{x}10^{-12}K_d + 4{,}84\text{x}10^{-7})^2[(-1{,}54\text{x}10^{-38}K_i + 1{,}27\text{x}10^{-43}K_iK_d - 8{,}93\text{x}10^{-33}K_d^2 + \ldots}$ $\frac{+1{,}51\text{x}10^{-42}K_pK_d^2 - 1{,}85\text{x}10^{-37}K_pK_d - 1{,}59\text{x}10^{-29})K_pK_d + (1{,}81\text{x}10^{-41}K_pK_iK_d^2 + \ldots}{+1{,}33\text{x}10^{-35}K_dK_p + 5\text{x}10^{-31}K_d - 1{,}62\text{x}10^{-30}K_p + 1{,}33\text{x}10^{-22})K_i + (2{,}36\text{x}10^{-32}K_d^3 + \ldots}$ $\frac{+9{,}98\text{x}10^{-59}K_pK_iK_d - 5{,}48\text{x}10^{-51}K_pK_i + 8{,}81\text{x}10^{-59}K_p^2K_d^3 + 3{,}93\text{x}10^{-46}K_pK_d^3 - \ldots}{+6{,}29\text{x}10^{-22}K_d^2 - 7{,}57\text{x}10^{-17}K_d - 9{,}33\text{x}10^{-25}K_pK_d + 3{,}47\text{x}10^{-28}K_p^2 + 1{,}14\text{x}10^{-19}K_p - \ldots}$ $\frac{-1{,}07\text{x}10^{-53}K_p^2K_d + 1{,}05\text{x}10^{-26}K_pK_d^2 - 1{,}28\text{x}10^{-11}K_pK_d - 5{,}33\text{x}10^{-34}K_d^4 - 1{,}42\text{x}10^{-23}K_d^3 + \ldots}{-2{,}41\text{x}10^{-16})K_d + (-4{,}23\text{x}10^{-23}K_p + 1{,}48\text{x}10^{-19})K_p + 1{,}69\text{x}10^{-14} \ldots}$ $\frac{+1{,}73\text{x}10^{-18}K_d^2 - 2{,}31\text{x}10^{-17}K_d + 1{,}51\text{x}10^{-63}K_iK_d^3 + 1{,}08\text{x}10^{-74}K_i^2K_d^2 - 3{,}75\text{x}10^{-46}K_i^2K_d + \ldots}{+2{,}01\text{x}10^{-34}K_iK_d^2 - 2{,}45\text{x}10^{-29}K_iK_d + 1{,}56\text{x}10^{-25}K_p + 8{,}96\text{x}10^{-43}K_i + 6{,}36\text{x}10^{-31})K_iK_d + \ldots}$ $\frac{+(-3{,}65\text{x}10^{-38}K_i - 8{,}37\text{x}10^{-30})K_i}{\ldots}$			
s^0	$0{,}28K_i$			

Para o sistema ser estável, pelo critério de Routh, cinco condições devem ser satisfeitas:

i. $K_d < \frac{4{,}84\text{x}10^{-7}}{3{,}97\text{x}10^{-12}} \Rightarrow K_d < 121914$

ii. $$K_p > (1347,62 + 5,07x10^{-8}K_d)K_d - 1,91x10^{-8}K_i - 18000$$

iii. $$K_i > \frac{(-2,36x10^{-32}K_d^3 - 6,29x10^{-22}K_d^2 + 7,57x10^{-17}K_d + 9,33x10^{-25}K_pK_d - \ldots}{(-1,54x10^{-38}K_i + 1,27x10^{-43}K_iK_d - 8,93x10^{-33}K_d^2 + 1,33x10^{-35}K_dK_p + \ldots}$$
$$\ldots\frac{-3,47x10^{-28}K_p^2 - 1,14x10^{-19}K_p + 2,41x10^{-16})K_d - \ldots}{+5x10^{-31}K_d - 1,62x10^{-30}K_p + 1,33x10^{-22})}$$
$$\ldots\frac{-(-4,23x10^{-23}K_p + 1,48x10^{-19})K_p - 1,69x10^{-14}}{}$$

iv. $$\begin{aligned} K_i < [&(-2,78x10^{-36}K_p^2 + 9,73x10^{-33}K_p + 1,11x10^{-27})K_p - (1,16x10^{-38}K_p + \\ &+ 2,21x10^{-36}K_i + 2,07x10^{-24})K_pK_i + (1,04x10^{-55}K_d^5 + 2,77x10^{-45}K_d^4 - \\ &- 1,02x10^{-39}K_d^3 + 1,24x10^{-34}K_d^2 - 5,03x10^{-30}K_d + 7,05x10^{-41}K_p^2 + \\ &+ 7,5x10^{-33}K_p + 1,53x10^{-51}K_p^2K_d^2 - 1,86x10^{-46}K_p^2K_d + 1,51x10^{-42}K_pK_d^2 - \\ &- 1,85x10^{-37}K_pK_d - 1,59x10^{-29})K_pK_d + (1,81x10^{-41}K_pK_iK_d^2 + \\ &+ 9,98x10^{-59}K_pK_iK_d - 5,48x10^{-51}K_pK_i + 8,81x10^{-59}K_p^2K_d^3 + \\ &+ 3,93x10^{-46}K_pK_d^3 - 1,07x10^{-53}K_p^2K_d + 1,05x10^{-26}K_pK_d^2 - \\ &- 1,28x10^{-11}K_pK_d - 5,33x10^{-34}K_d^4 - 1,42x10^{-23}K_d^3 + \\ &+ 1,73x10^{-18}K_d^2 - 2,31x10^{-17}K_d + 1,51x10^{-63}K_iK_d^3 + \\ &+ 1,08x10^{-74}K_i^2K_d^2 - 3,75x10^{-46}K_i^2K_d + 2,01x10^{-34}K_iK_d^2 - \\ &- 2,45x10^{-29}K_iK_d + 1,56x10^{-25}K_p + 8,96x10^{-43}K_i + \\ &+ 6,36x10^{-31})K_iK_d]/(3,65x10^{-38}K_i + 8,37x10^{-30}) \end{aligned}$$

v. $K_i > 0$

A fim de encontrar valores adequados para K_p, K_i, e K_d, foram atribuídos valores para esses ganhos e a resposta do sistema foi avaliada através de simulações. Foi o escolhido o conjunto de ganhos que forneceu uma resposta que satisfez as especificações de desempenho, apresentou o valor máximo da variável de controle dentro do limite estabelecido, e respeitou as desigualdades acima. Os valores encontrados foram:

$K_p = 30$ (3.33)

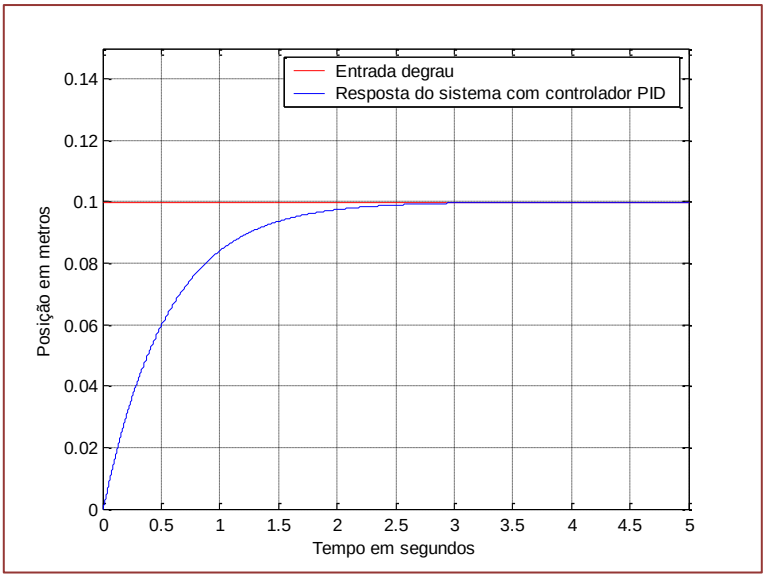
$K_i = 0,03$ (3.34)

$K_d = 0,001$ (3.35)

O sistema com controlador PID apresentou resposta ao degrau conforme indicado na Figura 3.20. Na Figura 3.21, pode-se verificar o comportamento da variável de controle

u(t). O lugar das raízes está apresentada na Figura 3.22, e o diagrama de Bode na Figura 3.24.

Figura 3.20 – Resposta y(t) do sistema com controlador PID a uma entrada degrau



O sistema com controlador PID projetado atende às especificações de desempenho requeridas. O tempo de acomodação obtido foi de 2,88s e não apresentou sobre-sinal. Margens de fase e de ganho são, respectivamente, 89,2º e 57,6 dB. A variável de controle u(t) permanece dentro do permitido, assumindo um valor máximo de 3V.

Figura 3.21 – Variável de controle u(t) do sistema com controlador PID

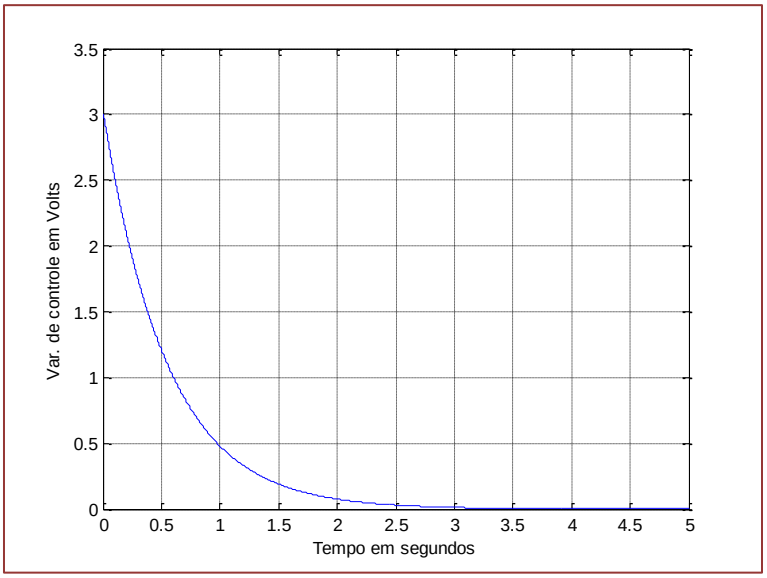


Figura 3.22 – Lugar das raízes do sistema com controlador PID

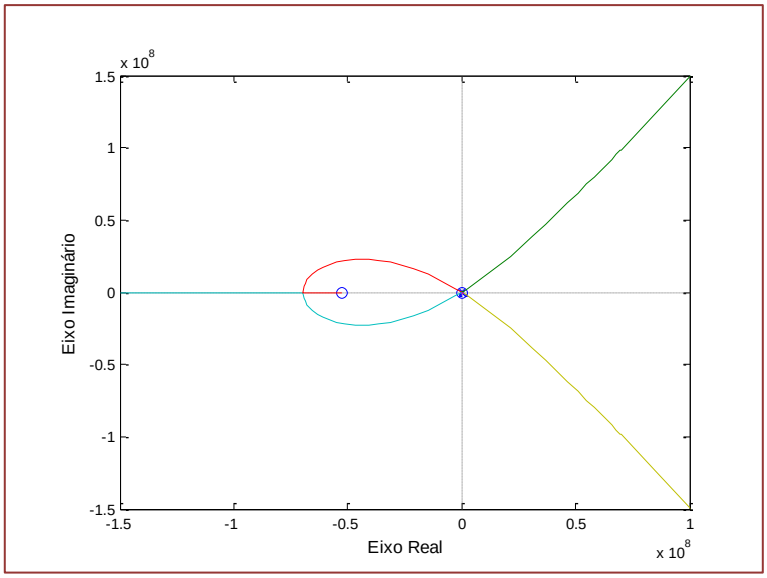


Figura 3.23 – Ampliação da Figura 3.22

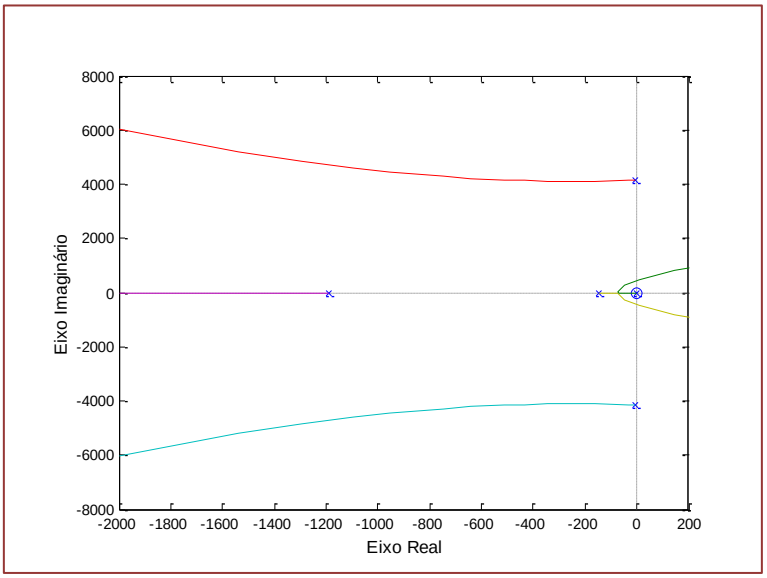
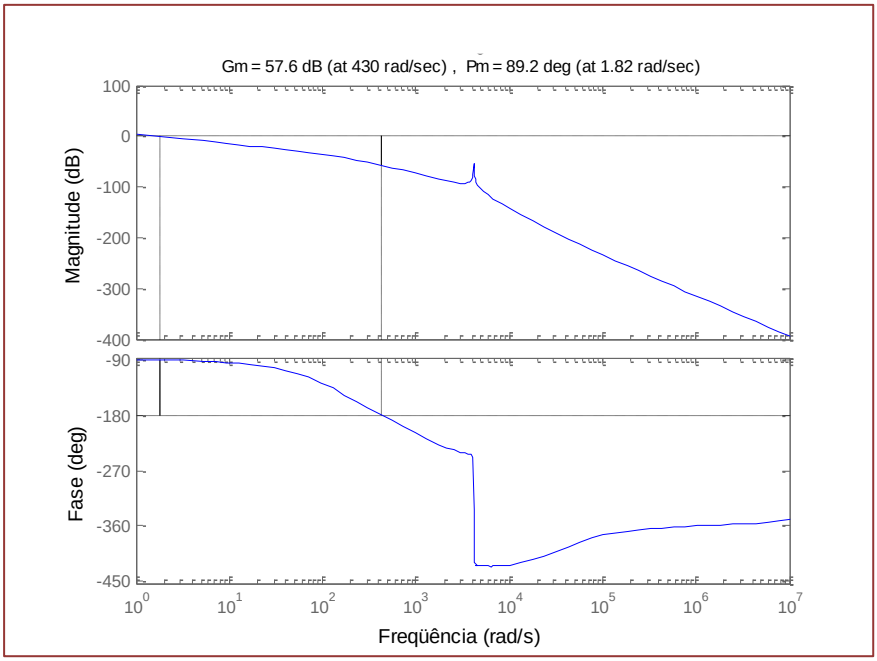


Figura 3.24 – Diagrama de Bode do sistema com controlador PID



3.7. PROJETO DE UM CONTROLADOR VIA IMPOSIÇÃO DE PÓLOS

Os procedimentos do projeto clássico desenvolvidos nas seções anteriores são baseadas na função de transferência do sistema. O projeto via imposição de pólos é baseada no modelo de estado do sistema. Este método permite que todos os pólos da função de transferência à malha fechada do sistema, sejam situados na posição desejada e para isto faz-se uso de uma realimentação de estados.

Considerar a planta definida por:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t) \tag{3.36}$$

$$y(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) \tag{3.37}$$

em que,

A — Matriz de estado

B — Matriz de entrada

C — Matriz de saída

Na Figura 3.25 está representando o diagrama de blocos de um sistema do tipo 1 e de ordem 5 com realimentação de estado. Neste sistema é utilizado o seguinte esquema de realimentação de estado:

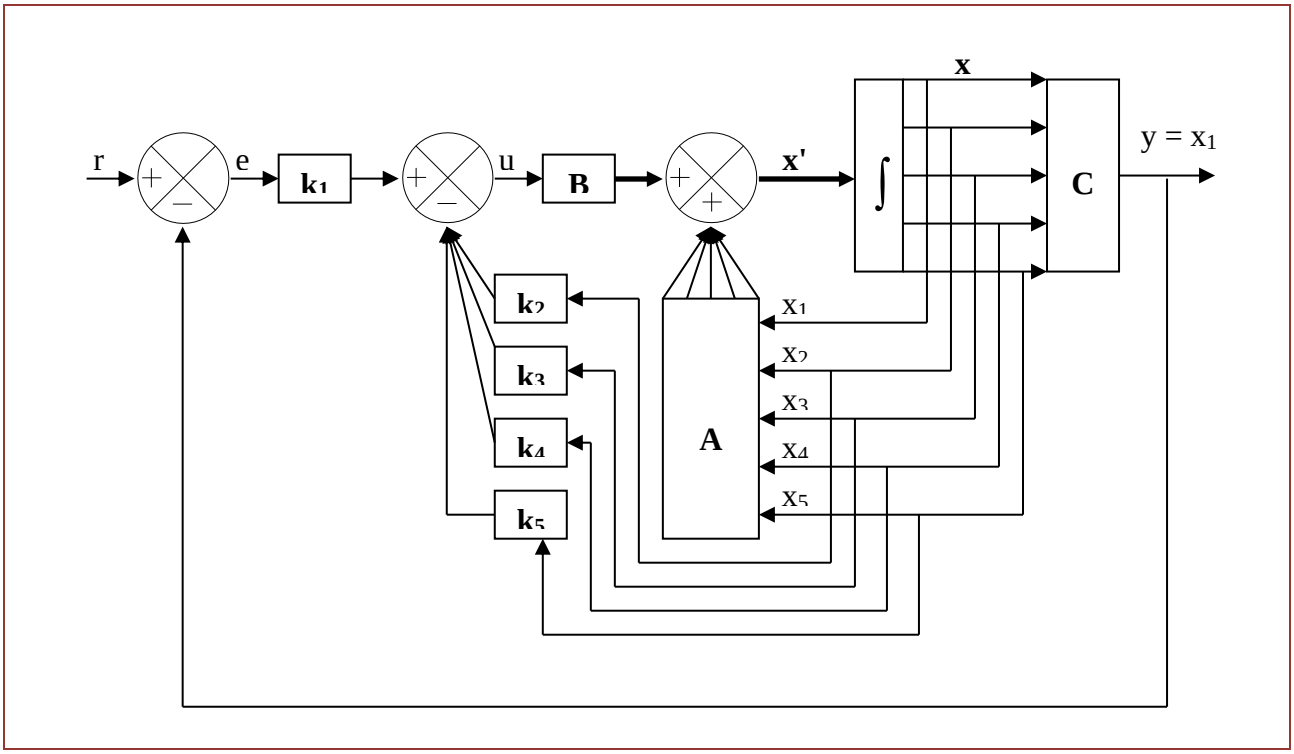
$$u(t) = -[0 \quad k_2 \quad k_3 \quad k_4 \quad k_5]\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \\ x_5(t) \end{bmatrix} + k_1(r(t) - x_1(t))$$

$$u(t) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(t) + k_1 r(t) \qquad (3.38)$$

em que,

$\mathbf{K} = [k_1 \quad k_2 \quad k_3 \quad k_4 \quad k_5]$

Figura 3.25 – Diagrama de blocos de uma equação de espaço de estado com realimentação de estados



Considerando-se que o sinal de referência é aplicado no instante t = 0, então, para t > 0 pode-se dizer que:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t) = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}k_1 r(t) \qquad (3.39)$$

O sistema deverá ser projetado de forma que y(∞) tenderá ao valor constante r(∞) e u(∞) tenderá a zero. No regime estacionário, tem-se:

$$\dot{\mathbf{x}}(\infty) = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})\mathbf{x}(\infty) + \mathbf{B}k_1 r(\infty) \qquad (3.40)$$

Considerando que r(t) é uma entrada degrau (r(∞) = r(t) = cte para t > 0), e subtraindo a Equação 3.39 da Equação 3.40, tem-se:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) - \dot{\mathbf{x}}(\infty) = (\mathbf{A} - \mathbf{BK})[\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}(\infty)] \quad (3.41)$$

Seja por definição,

$$\dot{\mathbf{x}}(t) - \dot{\mathbf{x}}(\infty) = \mathbf{e}(t) \quad (3.42)$$

Então a Equação 3.41 torna-se:

$$\dot{\mathbf{e}}(t) = (\mathbf{A} - \mathbf{BK})\mathbf{e}(t) \quad (3.43)$$

A Equação 3.43 descreve a dinâmica do erro e sua solução é expressa por:

$$\mathbf{e}(t) = e^{(\mathbf{A} - \mathbf{BK})t}\,\mathbf{e}(0) \quad (3.44)$$

em que **e**(0) é a condição inicial. A estabilidade e as características da resposta transitória são determinadas pelos autovalores da matriz **A** – **BK**. Se a matriz **K** for escolhida de forma adequada, a matriz **A** – **BK** pode ser feita uma matriz assitoticamente estável, e, para todo e(0) ≠ 0, é possível fazer e(t) tender para zero quando t tende para infinito. Os autovalores da matriz **A** – **BK** são chamados pólos do regulador. Se estes pólos reguladores estão localizados no semiplano S da esquerda, então **e**(t) tende para zero quando t tende para infinito (OGATA, 1998).

Os valores no regime estacionário (t = ∞) de **x**(t) e u(t) podem ser determinados da seguinte forma:

$$\dot{\mathbf{x}}(\infty) = 0 = (\mathbf{A} - \mathbf{BK})\mathbf{x}(\infty) + \mathbf{B}k_1 r(\infty)$$

Se os autovalores desejados de **A** – **BK** estirem no semiplano s da esquerda, existe a inversa da matriz **A** – **BK**. Consequentemente, **x**(∞) pode ser determinado como sendo:

$$\mathbf{x}(\infty) = (\mathbf{A} - \mathbf{BK})^{-1}\,\mathbf{B}k_1 r(\infty) \quad (3.45)$$

Além disso, pode-se obter u(∞) como

$$u(\infty) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(\infty) + k_1 r = 0 \quad (3.46)$$

No que se segue será demonstrado o procedimento para o projeto de um controlador via imposição de pólos. Segundo Ogata (1998) existe uma condição necessária e suficiente para alocação arbitrária de pólos. A condição é que o sistema seja a estados completamente controláveis.

3.7.1. CONTROLABILIDADE

O sistema linear e invariante no tempo é dito a estados completamente controláveis se for possível encontrar alguma entrada u(t) que transfira o estado inicial do sistema **x**(0) para a origem do espaço de estados, **x**(t_1) = 0, com t_1 finito (PHILLIPS & HARBOR, 1996).

Seja o sistema da Equação 3.36 contínuos no tempo:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t) \tag{3.36}$$

em que,

A — Matriz de estado n x n

B — Matriz de entrada n x 1

Define-se que o sistema apresentado pela Equação 3.36 é de estados completamente controlável se e somente se os vetores **B**, **AB**, ..., $\mathbf{A^{n-1}B}$ forem linearmente independentes (OGATA, 1998), ou seja, se a matriz n x n:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} B & \vdots & AB & \vdots & \dots & \vdots & A^{n-1}B \end{bmatrix} \tag{3.47}$$

for posto n.

3.7.2. ETAPAS DO PROJETO DE UM CONTROLADOR VIA IMPOSIÇÃO DE PÓLOS

Para o sistema definido pela Equação 3.36 com a variável de controle determinada pela Equação 3.38, o projeto de um controlador via imposição de pólos pode ser determinado através das etapas a seguir.

Etapa 1: Testar a condição de controlabilidade do sistema.

Etapa 2: Do polinômio característico da matriz **A**,

$$\left|s\mathbf{I} - \mathbf{A}\right| = s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1}s + a_n \tag{3.48}$$

determinar os valores de a_1, a_2, ..., a_n. Em que n é a ordem do sistema.

Etapa 3: Determinar uma matriz de transformação **T** que transforma a equação de estado na forma canônica controlável. Não é necessário escrever a equação de estado sob forma canônica controlável. É necessário apenas determinar **T**. Essa matriz de transformação é expressa por:

$$\mathbf{T} = \mathbf{MW} \tag{3.49}$$

em que, **M** é matriz de controlabilidade e é determinada através da Equação 3.47 e **W** é dada por:

$$\mathbf{W}=\begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_1 & 1 \\ a_{n-2} & a_{n-3} & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.50}$$

Etapa 4: Com os autovalores desejados, $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$, escrever o polinômio característico correspondente:

$$(s-\mu_1)(s-\mu_2)\cdots(s-\mu_n)=s^n+\alpha_1 s^{n-1}+\cdots+\alpha_{n-1}s+\alpha_n \tag{3.51}$$

e determinar os valores de $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$.

Etapa 5: A matriz de ganho de realimentação de estado **K** para localizar os pólos do sistema na posição desejada, do plano s, é determinada a partir de:

$$\mathbf{K}=\begin{bmatrix}\alpha_n-a_n & \vdots & \alpha_{n-1}-a_{n-1} & \vdots & \cdots & \vdots & \alpha_2-a_2 & \vdots & \alpha_1-a_1\end{bmatrix}\mathbf{T}^{-1} \tag{3.52}$$

3.7.3. PROJETO DE UM CONTROLADOR VIA IMPOSIÇÃO DE PÓLOS PARA O SISTEMA DA MESA XY

O modelo em espaço de estado do sistema da mesa XY é representado pelas Equações 2.35 e 2.36. Substituído os valores da Tabela 2.1 nessas duas equações obtém-se:

$$\begin{bmatrix}\dot{\theta}_1(t)\\ \dot{\omega}_1(t)\\ \dot{\theta}_2(t)\\ \dot{\omega}_2(t)\\ \dot{i}_a(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ -4,07x10^6 & -7,78x10^{-2} & 4,07x10^6 & 7,78x10^{-2} & 7,41x10^3\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 1,33x10^7 & 0,2530 & -1,33x10^7 & -0,2530 & 0\\ 0 & -31,34 & 0 & 0 & -1,34x10^3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\theta_1(t)\\ \omega_1(t)\\ \theta_2(t)\\ \omega_2(t)\\ i_a(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\2,39x10^3\end{bmatrix}V_a(t) \tag{3.53}$$

$$x(t)=\begin{bmatrix}0 & 0 & 7,96x10^{-4} & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\theta_1\\ \omega_1\\ \theta_2\\ \omega_2\\ i_a\end{bmatrix} \tag{3.54}$$

Da Equação 3.47, tem-se que a matriz de controlabilidade do sistema é representada pela Equação 3.55.

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1,77x10^{7} & -2,38x10^{10} & -4,43x10^{13} \\ 0 & 1,77x10^{7} & -2,38x10^{10} & -4,43x10^{13} & 6,50x10^{16} \\ 0 & 0 & 0 & 4,48x10^{6} & 2,34x10^{14} \\ 0 & 0 & 4,48x10^{6} & 2,34x10^{14} & -3,15x10^{17} \\ 2,39x10^{3} & -3,21x10^{6} & 3,75x10^{9} & -4,30x10^{12} & 7,16x10^{15} \end{bmatrix} \quad (3.55)$$

O posto da matriz **M** é 4. Como o posto da matriz **M** é menor que n = 5 o sistema não é completamente controlável, então existem autovalores da matriz **A** – **BK** que não podem ser controlados por retroação de estado. Segundo Ogata (1998) a condição necessária e suficiente para imposição arbitrária de pólos é que o sistema seja a estados completamente controláveis, sendo assim, as etapas seguintes para a obtenção de controlador via imposição de pólos para o sistema apresentado nas Equações 3.53 e 3.54 não poderão ser desenvolvidas, impossibilitando a realização do projeto de um controlador via imposição de pólos com retroação de estados para o modelo de um eixo de uma mesa XY representado pelas Equações 3.53 e 3.54.

3.8. CONCLUSÃO

Neste capítulo foram realizados os projetos dos controladores P, PD, PI e PID com base no critério de estabilidade de Routh e no máximo valor da tensão de alimentação do motor cc. O projeto do controlador via imposição de pólos não foi possível ser realizado, isto ocorreu devido o sistema não se apresentar de forma completamente controlável, o que é uma condição necessária e suficiente para a elaboração de um projeto deste tipo. As especificações de projeto analisadas foram à resposta transiente do sistema, o erro de posição em regime permanente e as características de margem de fase e margem de ganho.

Na Tabela 3.6 e na Figura 3.26 estão apresentados os resultados para o sistema representado pela Equação 2.37 com os diversos controladores projetados.

Tabela 3.6 – Resultados para o sistema um dos eixos da mesa XY com os controladores projetados utilizando uma referência degrau de amplitude 0,1 m

Controlador	M_p (%)	T_s (s)	MF (deg)	MG (dB)	$u(t)_{máx}$ (V)	e_{ssp} (mm)
P	0	2,94	89,2	57,2	3	0
PD	0	2,94	89,2	62,3	3	0
PI	0	2,94	89,2	57,2	3	0
PID	0	2,88	89,2	57,6	3	0

em que,

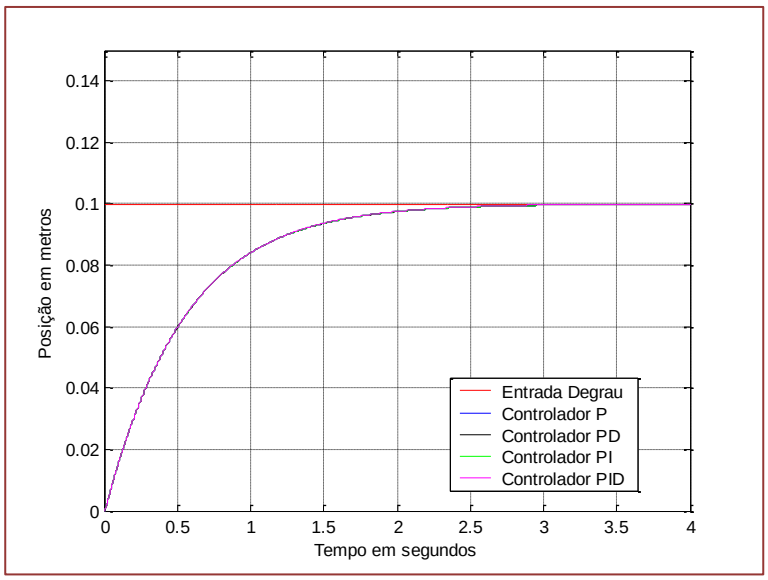
M_p – Sobre-sinal;

T_s – Tempo de acomodação;

MF – Margem de fase;

MG – Margem de ganho.

Figura 3.26 – Resposta y(t) do sistema com todos os controladores



Observando os dados da Tabela 3.6, nota-se que todos os controladores obedecem a todas as especificações de desempenho exigidas, pode-se observar ainda que o desempenho dos controladores foi muito semelhante em todos os itens analisados. Isto ocorre, provavelmente, devido aos pequenos valores assumidos para os ganhos derivativo e integral nesses controladores.

Não ocorreu em nenhum dos casos a presença de sobre-sinal. O controlador PID apresentou uma pequena redução no tempo de acomodação em relação aos outros controladores (P, PD e PI).

A margem de fase manteve-se constante em todos os controladores. A maior margem de ganho foi obtida pelo controlador PD e a menor, mas muito próximo dos demais controladores, foi obtida pelo controlador PID.

A variável de controle u(t) não excedeu o valor máximo permissível em nenhum dos projetos realizados, mantendo-se em 3 V.

Como o sistema de um dos eixos da mesa XY trata-se de um sistema do tipo 1, o erro de posição em regime permanente para todos os controladores foi nulo.

Para uma entrada degrau pode-se concluir que, quanto à resposta transiente, o controlador PID é o mais adequado para o sistema representado pela Equação 2.37. Tratando-se de regime permanente todos os controladores projetados apresentaram resultado satisfatório.

Para realização do projeto dos controladores descrito neste capítulo utilizou-se o modelo de um eixo da mesa XY desenvolvido no capítulo 2, com seus respectivos valores de parâmetros apresentado na Tabela 2.1. Mas algumas vezes, alguns desses valores são desconhecidos e difíceis a sua obtenção. Nesses casos, pode-se recorrer à técnica de estimação de parâmetro discutida no capítulo seguinte.

CAPÍTULO

04 Estimação de parâmetros de um eixo da mesa XY

4.1. INTRODUÇÃO

No capítulo 3 utilizou-se do modelo para um eixo de uma mesa XY, obtido no capítulo 2, e dos valores dos parâmetros apresentados na Tabela 2.1 (p. 33) para realização do projeto dos controladores, ocorre que, algumas vezes, nem todos os parâmetros do sistema são conhecidos e, em alguns sistemas mecânicos, mesmo com o conhecimento prévio de um modelo matemático que retrate aproximadamente o seu comportamento dinâmico, em dadas circunstâncias, é praticamente impossível obter-se parâmetros de forma direta. Nesses casos, podem-se recorrer à técnica de estimação de parâmetros, que objetivam a determinação dos valores desconhecidos dos parâmetros do sistema a partir dos sinais de entrada e de saída da planta (MARIANO *et all*, 2003a, Silva *et all*, 2003).

Neste capítulo apresenta-se uma técnica para estimação de parâmetros de um eixo de uma mesa XY de uma máquina de eletroerosão convencional, a qual não se conhece nenhum dos parâmetros descritos na Tabela 2.1(p. 33). Para isso fez-se necessário a realização de um *retrofitting*(readequação) neste equipamento, com a implementação de um motor elétrico para acionamento do eixo, um sistema de medição para posição axial e um programa computacional interpolador para acionar o motor, adquirir e armazenar os dados de entrada (alimentação do motor em Volts) e saída (deslocamento linear do eixo em mm) do processo.

4.2. ESTIMAÇÃO POR MÍNIMOS QUADRADOS

Para que se possa obter os parâmetros de um sistema a partir dos dados de entrada e saída, utilizando-se da técnica dos mínimos quadrados, o sistema deverá ser considerado linear e invariante no tempo (AGUIRRE, 2000). Tendo feitas tais considerações, o sistema pode ser representado por:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 & \dots & \mathbf{x}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \vdots \\ \theta_n \end{bmatrix}$$

ou

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\theta} \qquad (4.1)$$

em que, $\mathbf{y}$ é a matriz formada pelas variáveis dependentes de $\mathbf{X}$ que é chamada de matriz de variáveis independentes. $\boldsymbol{\theta}$ é a matriz de parâmetros a determinar.

Com objetivo de se obter uma solução para Equação 4.1, no início será considerado que se conhece o valor estimado do vetor de parâmetros, $\boldsymbol{\theta}$, e que é cometido um erro $\boldsymbol{\xi}$ ao se tentar explicar o valor observado $\mathbf{y}$, obtido a partir da matriz $\mathbf{X}$ e de $\boldsymbol{\theta}$, ou seja,

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\xi} \tag{4.2}$$

Deseja-se que $\boldsymbol{\theta}$, além de satisfazer a Equação 4.2, possa reduzir $\boldsymbol{\xi}$ ao máximo. Pelo princípio dos mínimos quadrados os parâmetros a serem estimados podem ser obtidos pela minimização da soma dos quadrados dos erros para cada medida, em relação aos valores calculados a partir dos parâmetros usados na Equação 4.2 (MARIANO, 2003). Assim, a soma dos quadrados dos erros presentes pode ser escrita da seguinte forma:

$$E_{MQ} = \boldsymbol{\xi}^T\boldsymbol{\xi} = \left(\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\theta}\right)^T\left(\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\theta}\right) = \mathbf{y}^T\mathbf{y} - \mathbf{y}^T\mathbf{X}\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}^T\mathbf{X}^T\mathbf{y} + \boldsymbol{\theta}^T\mathbf{X}^T\mathbf{X}\boldsymbol{\theta} \tag{4.3}$$

Derivando a Equação 4.3 em relação a $\boldsymbol{\theta}$ e igualando a zero, a fim de minimizar o erro, tem-se:

$$\frac{\partial E_{MQ}}{\partial \boldsymbol{\theta}} = -\left(\mathbf{y}^T\mathbf{X}\right)^T - \mathbf{X}^T\mathbf{y} + \left(\mathbf{X}^T\mathbf{X} + \mathbf{X}^T\mathbf{X}\right)\boldsymbol{\theta} = -2\mathbf{X}^T\mathbf{y} + 2\mathbf{X}^T\mathbf{X}\boldsymbol{\theta} = \mathbf{0} \tag{4.4}$$

Sabendo-se que $\mathbf{X}^T\mathbf{X}$ é uma matriz quadrada, tem-se:

$$\boldsymbol{\theta}_{MQ} = [\mathbf{X}^T\mathbf{X}]^{-1}\mathbf{X}^T\mathbf{y} \tag{4.5}$$

Assim, a Equação 4.5 constitui o estimador por mínimos quadrados dos parâmetros desconhecidos.

4.3. ESTIMAÇÃO POR MÍNIMOS QUADRADOS RECURSIVO

A estimação recursiva permite utilizar os dados sequenciados de entrada e saída de um processo para atualizar o vetor de parâmetros de um determinado modelo.

Técnicas recursivas são muito úteis por dois motivos. O primeiro deles foi mencionado acima, ou seja, é possível, utilizando técnicas recursivas, estimar os parâmetros de um determinado modelo à medida que os dados do processo são disponibilizados. Isto é útil quando os parâmetros do processo variam lentamente em função de não-linearidades (folgas, não retilineidade das guias, deformações elásticas, deformações térmicas, etc.), desgaste, falhas, etc. Algoritmos desenvolvidos para esse fim são denominados de algoritmos recursivos. Em segundo lugar, tais algoritmos são também úteis na resolução de problemas numéricos cuja solução em batelada[3] seria difícil.

Para estimar $\boldsymbol{\theta}$ de forma recursiva, a partir de uma sequência de dados,

[3] O termo batelada está relacionado com o algoritmo que processa todos os dados de uma só vez, diferente do termo recursivo que está relacionado com o algoritmo que processa os dados seqüencialmente.

representados em y(k) e ψ(k-1), em que, ψ(k-1) é o vetor de regressores formado na iteração k com informação disponível até a iteração k-1, e k = 1, 2, . . ., para a qual não é necessário considerar um limite de tamanho. O sistema deverá ser escrito da seguinte maneira:

$$y(k) = \psi^T(k-1)\theta + \xi(k) \tag{4.6}$$

A partir da Equação 4.5, pode-se escrever o θ_{RMQ} da seguinte forma:

$$\theta_{RMQ} = \left[\sum_{i=1}^{k} \Psi(i-1)\Psi^T(i-1)\right]^{-1}\left[\sum_{i=1}^{k} \Psi(i-1)y(i)\right] \tag{4.7}$$

Definindo,

$$P_k = \left[\sum_{i=1}^{k} \Psi(i-1)\Psi^T(i-1)\right]^{-1} \tag{4.8}$$

logo, deduz-se, que:

$$P_k^{-1} = \left[\sum_{i=1}^{k} \Psi(i-1)\Psi^T(i-1)\right]$$

$$P_k^{-1} = \left[\sum_{i=1}^{k-1} \Psi(i-1)\Psi^T(i-1)\right] + \Psi(k-1)\Psi^T(k-1)$$

$$= P_{k-1}^{-1} + \Psi(k-1)\Psi^T(k-1) \tag{4.9}$$

Substituindo a Equação 4.8 na Equação 4.7, tem-se:

$$\theta_{RMQ} = P_k\left[\sum_{i=1}^{k} \Psi(i-1)y(i)\right] = P_k\left[\sum_{i=1}^{k-1} \Psi(i-1)y(i) + \Psi(k-1)y(k)\right] \tag{4.10}$$

Escrevendo-se a Equação 4.7 para o instante k-1, tem-se:

$$\left[\sum_{i=1}^{k-1} \Psi(i-1)\Psi^T(i-1)\right]\theta_{k-1} = \left[\sum_{i=1}^{k-1} \Psi(i-1)y(i)\right] \tag{4.11}$$

sendo que o lado esquerdo da Equação 4.11 pode ser representado em forma compactada como sendo $P_{k-1}^{-1}\theta_{k-1}$. Substituindo-se esse resultado na Equação 4.10, chega-se a:

$$\theta_k = P_k\left[P_{k-1}^{-1}\theta_{k-1} + \Psi(k-1)y(k)\right]$$

$$= P_k\left[P_{k-1}^{-1} - \Psi(k-1)\Psi^T(k-1)\theta_{k-1} + \Psi(k-1)y(k)\right]$$

$$= \theta_{k-1} - P_k \Psi(k-1)\Psi^T(k-1)\theta_{k-1} + P_k \Psi(k-1)y(k)$$

$$= \theta_{k-1} + P_k \Psi(k-1)\left[y(k) - \Psi^T(k-1)\theta_{k-1} \right]$$

$$= \theta_{k-1} + K_k \eta(k) \qquad (4.12)$$

em que,

$$K_k = P_k \Psi(k-1)$$

$$\eta(k) = y(k) - \Psi^T(k-1)\theta_{k-1}$$

O resíduo $\eta(k)$ pode ser interpretado como o erro na predição do sinal y(k) um passo a frente baseado na estimação θ_{k-1}.

A Equação 4.12 torna evidente que para usar o algoritmo recursivo em questão é necessário calcular P_k. O uso direto da Equação 4.9 para esse fim é inadequado uma vez que tal equação requer uma inversão de matriz a cada interação do algoritmo. Uma expressão numericamente mais vantajosa pode ser obtida aplicando-se o lema de inversão (AGUIRRE, 2000).

Lema 4.1: Supondo que as inversas das matrizes A, C e $C^{-1} + DA^{-1}B$ existam,

$[A + BCD]^{-1} = A^{-1} - A^{-1}B\,[C^{-1} + DA^{-1}B]^{-1}DA^{-1}$

aplicando o Lema 4.1 para P_k e usando a Equação 4.9, tem-se que,

$$P_k = \left[P_{k-1}^{-1} + \Psi(k-1)\Psi^T(k-1) \right]^{`-1} \qquad (4.13)$$

$$P_k = P_{k-1} - P_{k-1}\Psi(k-1)\left[I + \Psi^T(k-1)P_{k-1}\Psi(k-1) \right]^{-1} \Psi^T(k-1)P_{k-1} \qquad (4.14)$$

portanto, pode-se concluir que,

$$K_k = P_{k-1}\Psi(k-1) - P_{k-1}\Psi(k-1)\left[I + \Psi^T(k-1)P_{k-1}\Psi(k-1) \right]^{-1} \Psi(k-1)$$

resultando em,

$$K_k = P_{k-1}\Psi(k-1)\left[I + \Psi^T(k-1)P_{k-1}\Psi(k-1) \right]^{-1} \qquad (4.15)$$

Colocando-se as Equações 4.12, 4.15 e 4.14 numa ordem apropriada para cálculo e observando que $\Psi_k = \Psi(k-1)$, obtém-se:

$$\theta_k = \theta_{k-1} + K_k \eta(k) \qquad (4.16)$$

$$K_k = P_{k-1}\Psi_k\left[I + \Psi_k^T P_{k-1}\Psi_k\right]^{-1} \quad (4.17)$$

$$P_k = P_{k-1} - K_k\Psi_k^T P_{k-1} \quad (4.18)$$

As Equações 4.16, 4.17 e 4.18 definem, portanto, o estimador por mínimos quadrados recursivos (RMQ).

4.4. MODERNIZAÇÃO DO EIXO DA MESA POSICIONADORA

A maioria das máquinas-ferramenta usam sistemas de posicionamento de um eixo (X), dois eixos (XY), ou três eixos (XYZ), percorrendo trajetórias que variam de milímetros até metros, com exatidão tão pequenas quanto um nanômetro. Posicionadores integram diversos sistemas mecânicos tais como tornos, fresadoras, centros de usinagem, máquinas de medição por coordenadas, entre outros (MARIANO *et all*, 2003b). A mesa posicionadora utilizada neste trabalho apresenta dois eixos e foi parte integrante de uma máquina de eletroerosão convencional. Nesta seção descreve-se os procedimentos e os componentes utilizados na reforma e atualização dessa mesa, o que tornou possível a concepção de um sistema de posicionamento comandado numericamente por computador. Procedimento esse que se denomina *retrofitting*(readequação).

4.4.1. *RETROFITTING*(READEQUAÇÃO) EM MÁQUINAS-FERRAMENTA

Para que se possa entender o significado do termo *retrofitting* é preciso conhecer os conceitos dos termos: restauração, reforma e atualização de máquinas.

A *restauração* em máquinas pode ser entendida como uma simples recuperação das condições originais da máquina, que foram afetados pelas condições do ambiente e tempo de uso, mas além do fator ambiental e tempo, os componentes são desgastados devido ao atrito de suas partes. Na ampla aplicação de máquinas operatrizes, os deslocamentos dos carros se dão com contato e deslizamento de uma parte metálica contra a outra. Infelizmente, mesmo com uma manutenção rigorosa em termos de limpeza de guias e sua lubrificação, é impossível evitar o desgaste por atrito, o que compromete a performance da máquina. Nessa situação, nada melhor do quer parar imediatamente a máquina para uma desmontagem e reforma com correção da geometria e remoção de possíveis folgas. Para uma definição mais direta, o conceito *reforma* deve ser aplicado sempre que se apresentarem problemas de desgastes de partes por atrito, causadas pelo uso prolongado do equipamento. Em linhas gerais, *reforma* é um conjunto de atividades que contém todos os elementos praticados na restauração, adicionados a atividades de recuperação geométrica (PANSIERA, 2002).

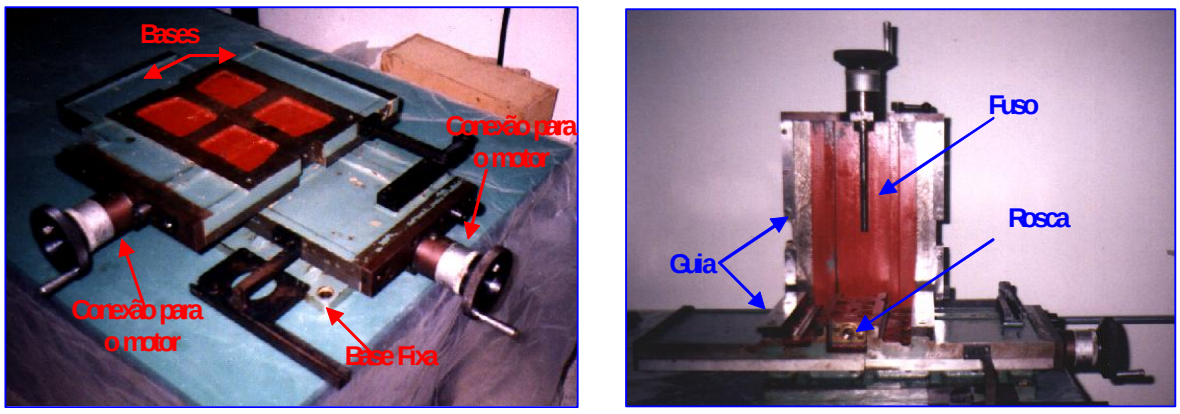
Nos últimos anos as máquinas-ferramenta têm experimentado um rápido desenvolvimento, devido principalmente à utilização dos sistemas de comando numérico computadorizado (CNC). Com o passar do tempo às máquinas ferramentas e em especial as controladas numericamente, apresentam sintomas que alertam para a inadequação ou fim de vida útil das mesmas. Do ponto de vista econômico, a simples troca destes equipamentos pode-se tornar um investimento extremamente dispendioso, no entanto, uma alternativa que vem sendo experimentada com muito sucesso por diversas empresas é a atualização tecnológica das máquinas-ferramenta. Desta forma pode-se dizer, que

agregar recursos a um equipamento, de forma que ele se adeque a uma nova realidade é o conceito de *atualização* em máquinas-ferramenta (PANSIERA, 2002).

A partir destes conceitos, pode-se dizer que *retrofitting* (que significa literalmente "readequar"), pode ser definido como uma atividade combinada de atualização com reforma (PANSIERA, 2002).

Neste trabalho realiza-se um *retrofitting* em um dos eixos de uma mesa XY que foi parte integrante de uma máquina de eletroerosão convencional, a qual é apresentada na Figura 4.1. Esta é composta por duas mesas perpendiculares de movimento retilíneo, acopladas a guias quadradas e acionadas por meio do movimento de rotação nos fusos de roscas quadradas com passo de 2 mm e de entrada única. Em ambos os eixos (X e Y), o fuso é fixo à parte móvel da mesa e trabalha acoplado a uma porca montada na base fixa da mesa.

Figura 4.1 — a) Mesa de coordenadas X-Y b) Mesa de coordenadas X-Y desmontada



(a) (b)

Como pode ser visto na Figura 4.1, o colar manual será substituído por um motor elétrico CC controlado pela armadura[4] fabricado pela BOSCH, com tensão máxima de alimentação de 12 VCC, que servirá de atuador, acionando o eixo da mesa XY.

4.4.2. SISTEMAS DE MEDIDAS DE POSIÇÃO

Entre as possíveis alternativas para o sistema de medição de posição, estão os:

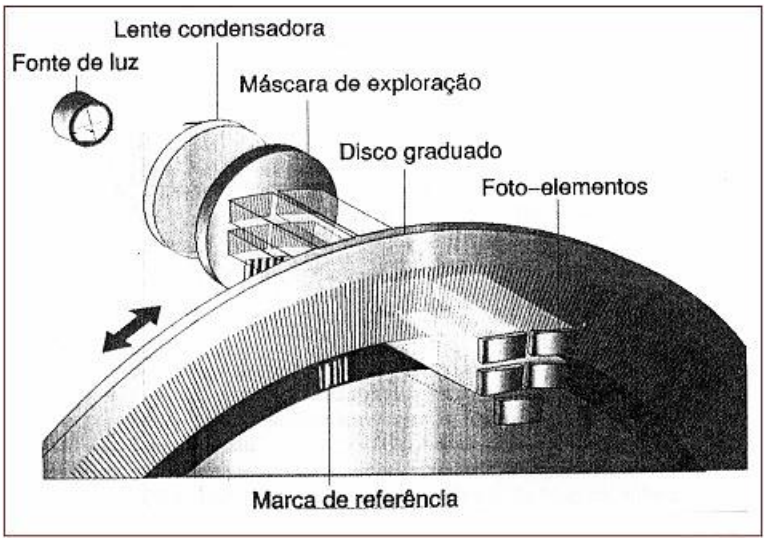
- Sistemas de medição indireta (rotativas):
  - Codificadores ópticos rotativos (*encoders*);
  - Escalas rotativas indutivas.
- Sistemas de medição direta (translativos):
  - Escalas ópticas;
  - Escalas indutivas.

[4] Na seção 2.4 estão descritas as partes principais e funcionamento deste tipo de motor.

Uma restrição existente é imposta pela maioria dos CNC's, cuja entrada requer sinais digitais de posição. Isto obriga a adotar sistemas de medição que forneçam informação digital, eliminando as alternativas como os sistemas indutivos, que fornecem sinais analógicos, o que levaria à necessidade de implementar circuitos eletrônicos para conversão dos sinais analógicos em digitais (BRENES, 1994).

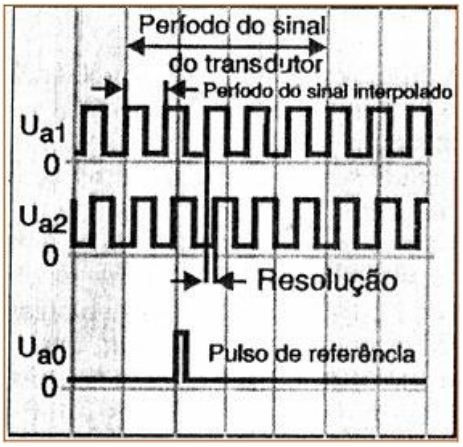
O *encoder* é um transdutor que converte um deslocamento mecânico em pulsos elétricos. Este transdutor mede o deslocamento linear do eixo da mesa através do deslocamento angular do eixo do motor. O sistema de controle conta o número de pulsos enviado pelo *encoder* e, através de um algoritmo matemático, calcula o espaço efetivamente percorrido pelo eixo da mesa (CAPELLI, 2002). Na Figura 4.2 estão representados os elementos de um *encoder*. Nota-se que o disco perfurado é o responsável pela passagem (ou não) da luz até os elementos sensíveis.

Figura 4.2 – Elementos do *encoder* (CAPELLI, 2002)



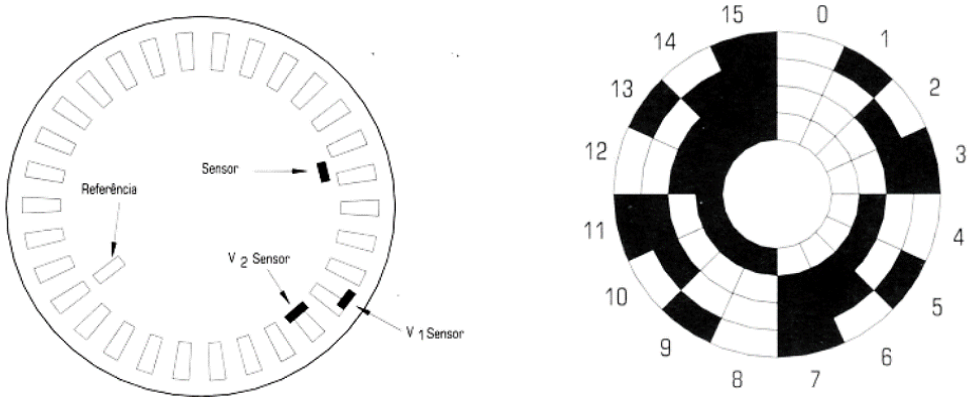
Na Figura 4.3 observa-se os três sinais elementares do *enconder*. Os sinais U_{a1} e U_{a2} são os que fornecem a indicação da posição e também o sentido de giro. O sentido do giro é determinado pela defasagem de fase entre os dois sinais, ou seja, se o canal U_{a1} estiver 90^o avançado em relação a U_{a2}, então o *enconder* estará girando no sentido horário, se o canal U_{a1} estiver 90^o atrasado em relação a U_{a2}, então o *enconder* estará girando no sentido anti-horário. O pulso U_{a0} é o pulso referência e indica quando uma rotação foi completada.

Figura 4.3 – Formas de onda de um *encoder* (CAPELLI, 2002)



Os *encoders* podem ser encontrados em dois tipos: o incremental, e o absoluto. O *encoder incremental*, apresentado na Figura 4.4a, gera pulsos para as interações subsequentes, porém, quando parado, não há sinal algum na sua saída. Isto significa que, para a máquina saber onde seu eixo está, é necessária a movimentação do *encoder* e, consequentemente, a geração de pulsos. Uma máquina equipada com este tipo de *encoder*, ao ser desligada, necessita de um novo referencial. O *encoder absoluto*, apresentado na Figura 4.4b, ao contrário do incremental gera uma palavra de 6 a 8 bits de uma única vez, e não serialmente. Uma máquina que usa este tipo de *encoder* não necessita de uma novo referencial após o seu desligamento (CAPELLI, 2002).

Figura 4.4 – (a) *Encoder* incremental (b) *Encoder* absoluto (PAZOS, 2002)



(a) (b)

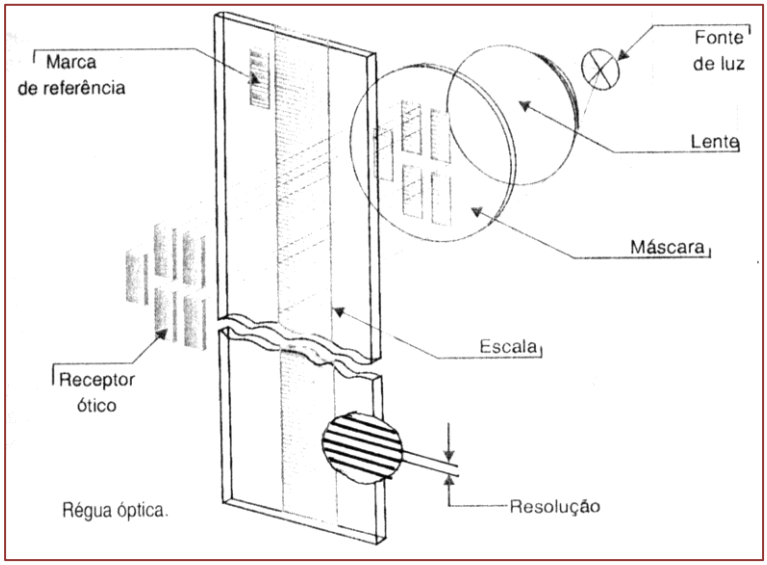
Uma variação do *encoder* rotativo é a escala óptica (Figura 4.5), executa a medida de forma direta, pois mede o deslocamento através do movimento linear do eixo da máquina e não através da rotação do motor.

Do ponto de vista da metrologia, segundo o princípio de Abbe[5], a melhor opção é a utilização dos sistemas de medição direta (BRENES, 1994). Por ter se apresentado como

[5] O princípio de Abbe diz que um objeto a ser medido e uma escala padrão devem ser alinhados na direção de um eixo de medição. Este princípio foi estabelecido pelo cientista alemão Ernst Abbe em 1890 e é seguido pela maioria dos equipamentos de medição modernos (WADA, 1997).

a melhor opção, a escala óptica incremental com resolução de 0,61 mm, foi o sistema de medição incorporado ao eixo da mesa XY.

Figura 4.5 – Escala óptica

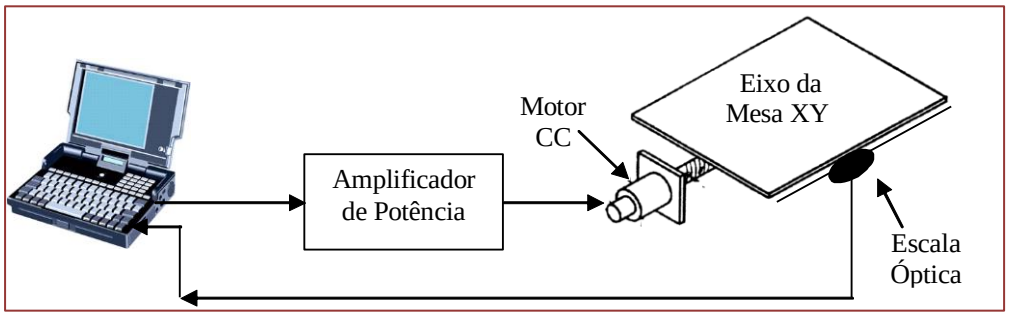


4.4.3. SISTEMA INTERPOLADOR

Os movimentos da mesa são controlados por um programa elaborado no ambiente LabView®, sendo executado em um microcomputador dotado de um processador K6II-500MHz e uma placa de aquisição de dados da Quatech, modelo: DAQ – 801.

A tensão de alimentação do atuador da mesa é gerada pelo programa de forma digital, este sinal é transformado em sinal analógico pela placa Quatech e amplificado, com utilização de um amplificador de potência, acionando o motor CC acoplado ao eixo da máquina. O sensor óptico transforma o movimento linear da mesa em pulsos elétricos, que são captados pela placa de aquisição e enviados para o programa interpolador, que por sua vez, se utiliza de um algoritmo matemático, calcula o espaço percorrido pelo eixo da mesa. Na Figura 4.6 é apresentado um esquema da montagem da bancada para testes experimentais.

Figura 4.6 – Esquemático da bancada experimental



4.5. ESTIMAÇÃO DE PARÂMETROS DA BANCADA EXPERIMENTAL

Para estimação dos parâmetros de um eixo da mesa XY (Figura 4.1), utilizou-se da técnica de mínimos quadrados recursivo, descrita na seção 4.3.2. Para obter-se os dados a serem utilizados na estimação, foi elaborado um programa no ambiente LabView® (Figura 4.7) que gera um sinal senoidal de amplitude e frequência pré-determinada para alimentar o amplificador de potência em malha aberta. Esta entrada produz um movimento alternado de mesma frequência no eixo. Escolheu-se um sinal de excitação do tipo seno, para garantir uma característica indispensável no processo de identificação de sistemas que é a manutenção das condições de excitação persistente, obtida através de um sinal deste tipo. Sinais de entrada do tipo onda quadrada, ruído branco e Schroeder também atendem a esta característica de excitação persistente (MARIANO *et all*, 2003b).

A posição axial é obtida a partir da escala óptica, através da seguinte relação:

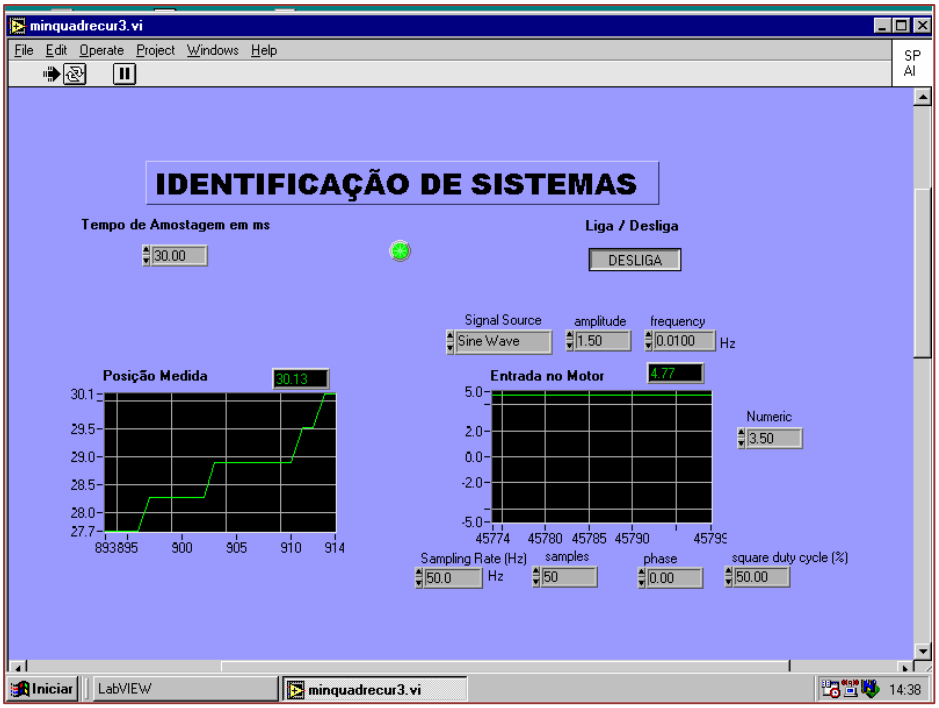
$$x(t) = R_{eo}N_p(t) \qquad (4.18)$$

em que,

R_{eo} – Resolução da escala óptica;

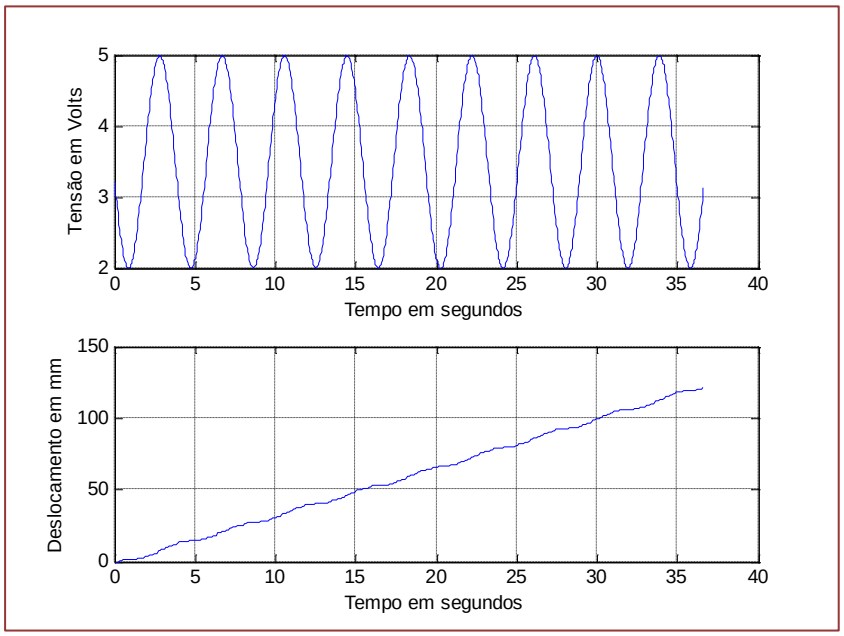
N_p – Número de pulsos contados.

Figura 4.7 – Tela principal do programa em ambiente LabView para obtenção dos dados experimentais



O programa elaborado no LabView® grava os dados de entrada e saída em um arquivo de dados que é aberto pelo programa Matlab® para posteriores tratamentos. Na Figura 4.8 apresentam-se dados experimentais de entrada e saída para um teste realizado em malha aberta. O período de amostragem é T_a = 30 ms.

Figura 4.8 – Dados de entrada e saída do sistema de um eixo de uma mesa XY



Uma vez que, se deseja estimar os parâmetros de um dos eixos da mesa XY, utilizou-se o modelo apresentado na Equação 2.30:

$$\frac{X(s)}{V_a(s)} = \frac{\ell.K_m(Bs+K)K_x}{(I_1I_2L_a)s^5+[I_1I_2R_a+L_aB(I_1+I_2)]s^4+[(I_1+I_2)(BR_a+L_aK)+I_2K_mK_b]s^3+\ldots} \quad (2.30)$$

$$\ldots\overline{+[(I_1+I_2)R_aK+K_mK_bB]s^2+(K_mK_bK)s}$$

Devido a técnica dos mínimos quadrados recursivos ser utilizada para modelos discretos, utilizou-se a aproximação $s = \frac{z-1}{T_a}$ para discretizar a Equação 2.30, resultando em:

$$\frac{x(k)}{v_a(k)} = \frac{\ell.K_mBK_xz^{-4}-\ell.K_mBK_xz^{-5}+\ell.K_mK_xKT_az^{-5}}{(I_1I_2L_a/T_a^4)(1-5z^{-1}+10z^{-2}-10z^{-3}+5z^{-4}-z^{-5})+\ldots}$$

$$\ldots\overline{+\{[I_1I_2R_a+L_aB(I_1+I_2)]/T_a^3\}(z^{-1}-4z^{-2}+6z^{-3}-4z^{-4}+z^{-5})+\ldots} \quad (4.19)$$

$$\ldots\overline{+\{[(I_1+I_2)(BR_a+L_aK)+I_2K_mK_b]/T_a^2\}(z^{-2}-3z^{-3}+3z^{-4}-z^{-5})+\ldots}$$

$$\ldots\overline{+\{[(I_1+I_2)R_aK+K_mK_bB]/T_a\}(z^{-3}-2z^{-4}-z^{-5})+(K_mK_bK)(z^{-4}-z^{-5})}$$

sendo z^{-n} o operador de atraso de forma que $x(k)z^{-n} = x(k-1)$ e $v_a(k)\,z^{-n} = v_a(k-1)$, tem-se:

$$x(k) = -a_1x(k-1)-a_2x(k-2)-a_3x(k-3)-a_4x(k-4)- \\ -a_5x(k-5)+b_1v_a(k-4)+b_2v_a(k-5) \quad (4.20)$$

em que,

$$a_1 = -5+\frac{[I_1I_2R_a+L_aB(I_1+I_2)]T_a}{I_1I_2L_a}$$

$$a_2 = 10-\frac{4[I_1I_2R_a+L_aB(I_1+I_2)]T_a+[(I_1+I_2)(BR_a+L_aK)+I_2K_mK_b]T_a^2}{I_1I_2L_a}$$

$$a_3 = -10-\frac{6[I_1I_2R_a+L_aB(I_1+I_2)]T_a+3[(I_1+I_2)(BR_a+L_aK)+I_2K_mK_b]T_a^2}{I_1I_2L_a}+$$

$$+\frac{[(I_1+I_2)R_aK+K_mK_bB]T_a^3}{I_1I_2L_a}$$

$$a_4 = 5 + \frac{-4[I_1 I_2 R_a + L_a B(I_1 + I_2)]T_a + 3[(I_1 + I_2)(BR_a + L_a K) + I_2 K_m K_b]T_a^2}{I_1 I_2 L_a} +$$
$$+ \frac{-2[(I_1 + I_2)R_a K + K_m K_b B]T_a^3 + (K_m K_b K)T_a^4}{I_1 I_2 L_a}$$

$$a_5 = -1 + \frac{[I_1 I_2 R_a + L_a B(I_1 + I_2)]T_a - [(I_1 + I_2)(BR_a + L_a K) + I_2 K_m K_b]T_a^2}{I_1 I_2 L_a} +$$
$$+ \frac{[(I_1 + I_2)R_a K + K_m K_b B]T_a^3 - (K_m K_b K)T_a^4}{I_1 I_2 L_a}$$

$$b_1 = \frac{(\ell . K_m B K_x)T_a^4}{I_1 I_2 L_a}$$

$$b_2 = \frac{-\ell . K_m B K_x T_a^4 + \ell . K_m K_x K T_a^5}{I_1 I_2 L_a}$$

A partir da Equação 4.20, dos dados experimentais apresentados na Figura 4.8 e do algoritmo desenvolvido na seção 4.3.2, foi gerado um programa no Matlab® (Apêndice) para estimação dos parâmetros do eixo da mesa XY, utilizando-se da técnica dos mínimos quadrados recursivos. Nas Figuras 4.9 e 4.10, e na Tabela 4.1 são apresentados os resultados da estimação.

Figura 4.9 – Parâmetros estimados: a_1, a_2, a_3 e a_4

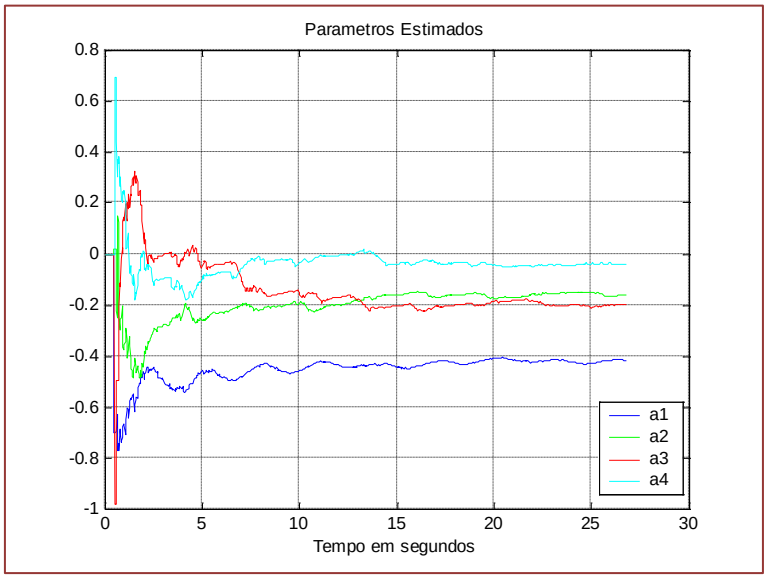
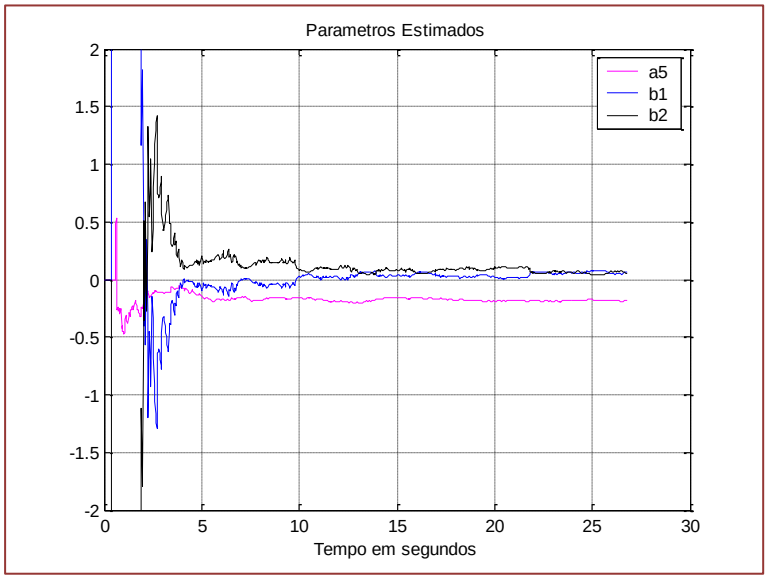


Figura 4.10 – Parâmetros estimados: a_5, b_1 e b_2



Pode-se observar das Figuras 4.9 e 4.10, que os parâmetros convergem para os valores descritos na Tabela 4.1.

Tabela 4.1 – Parâmetros estimados pela técnica dos mínimos quadrados recursivos para um eixo da mesa XY

Parâmetro	Valor estimado
a_1	- 0,4200
a_2	- 0,1628
a_3	- 0,1960
a_4	- 0,0369
a_5	- 0,1840
b_1	0,0642
b_2	0,0556

Utilizando-se da aproximação $z = sT_a + 1$, obtém-se da Equação 4.20, a seguinte função de transferência para o sistema de um dos eixos da mesa XY:

$$\frac{X(s)}{V_a(s)} = \frac{b_1 T_a s + b_1 + b_2}{T_a^5 s^5 + (5+a_1)T_a^4 s^4 + (10+4a_1+a_2)T_a^3 s^3 + (10+6a_1+3a_2+a_3)T_a^2 s^2 + \ldots} \quad (4.21)$$

$$\ldots \overline{(5+4a_1+3a_2+2a_3+a_4)T_a s + 1 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5}$$

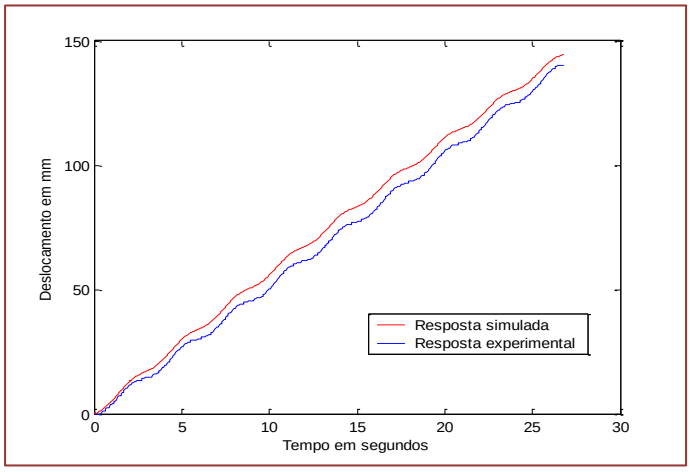
substituindo os valores da Tabela 4.1 na Equação 4.21, obtém-se:

$$\frac{X(s)}{V_a(s)} = \frac{1,93x10^{-3}s + 0,12}{2,43x10^{-8}s^5 + 3,71x10^{-6}s^4 + 2,2x10^{-4}s^3 + 6,12x10^{-3}s^2 + 0,07s + 4,18x10^{-4}} \quad (4.22)$$

A fim de verificar o desempenho do modelo apresentado pela Equação 4.22, fez-se

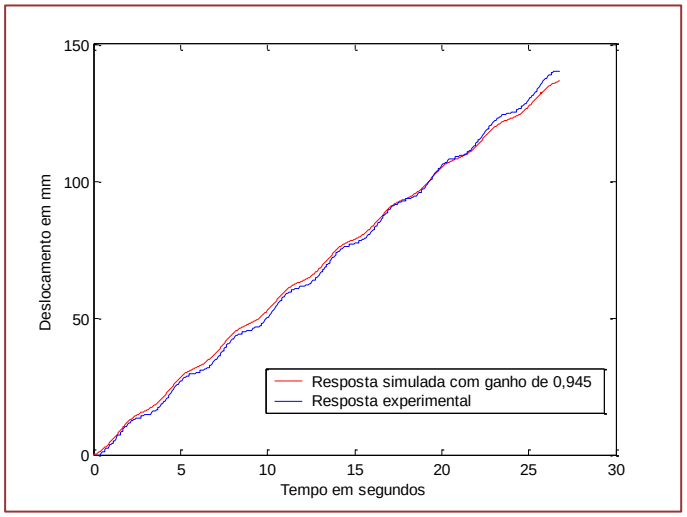
necessário à simulação em condições de operação na qual se tenha resposta que permita comparar com a saída experimental do sistema, para isto excitou-se o modelo da Equação 4.22 e a bancada experimental com o mesmo sinal de entrada (onda senoidal), e observou-se a seguinte resposta apresentada na Figura 4.11.

Figura 4.11 – Sinal do deslocamento medido experimentalmente e simulado a partir do modelo estimado



Observa-se na Figura 4.11 que a resposta simulada tem a mesma forma da resposta experimental, porém precisa de ajustes. Basicamente, percebe-se que a resposta simulada é mais rápida do que a resposta experimental. Portanto, para sintonizar a resposta simulada com a resposta experimental deve-se fazer com que a resposta simulada se torne mais lenta na presença de um sinal de excitação, através da implementação de um ganho. Após realizar algumas simulações, chegou-se que este ganho deve ser igual a 0,945. A Figura 4.12 apresenta a resposta simulada com a atuação do ganho.

Figura 4.12 – Sinal do deslocamento medido experimentalmente e simulado com o modelo ajustado



Observa-se na Figura 4.12 que o ganho adicionado à Equação 4.22 melhorou a identificação da saída do sistema, sendo assim, a nova função de transferência do sistema é dada por:

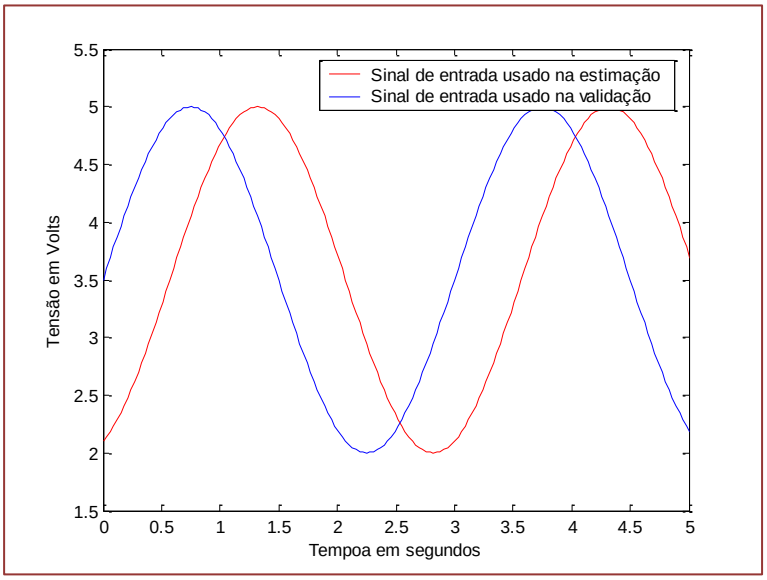
$$\frac{X(s)}{V_a(s)} = \frac{0,945(1,93x10^{-3}s + 0,12)}{2,43x10^{-8}s^5 + 3,71x10^{-6}s^4 + 2,2x10^{-4}s^3 + 6,12x10^{-3}s^2 + 0,07s + 4,18x10^{-4}}$$

$$\frac{X(s)}{V_a(s)} = \frac{1,82x10^{-3}s + 0,11}{2,43x10^{-8}s^5 + 3,71x10^{-6}s^4 + 2,2x10^{-4}s^3 + 6,12x10^{-3}s^2 + 0,07s + 4,18x10^{-4}} \quad (4.23)$$

4.5.1. VALIDAÇÃO DO MODELO

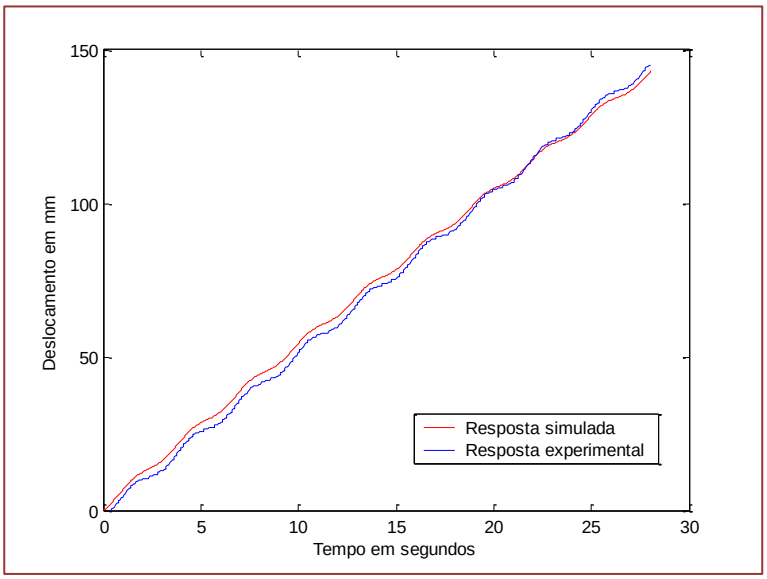
A Figura 4.12 deixa claro que o ajuste descrito na seção 4.3.3 foi eficaz em ajustar a saída do modelo aos dados experimentais obtidos, mas não garante que o modelo é válido para situações diferentes da mostrada na Figura 4.12. Por este motivo existe a necessidade de validar o modelo. Para isso, deve-se simular o modelo sem qualquer ajuste adicional e compará-lo a dados medidos coletados em teste diferentes daqueles usados no desenvolvimento e sintonia do modelo (AGUIRE, 2000). Para validação do modelo representado pela Equação 4.23, uma outra coleta de dados foi realizada com um sinal de entrada defasado em relação ao sinal de entrada utilizado para estimação, como se pode observar na Figura 4.13.

Figura 4.13 – Sinais de entrada do sistema utilizados para estimação e validação do modelo



A Figura 4.14 apresenta os resultados do novo teste, bem como a simulação do modelo nessa condição. A figura sugere que o modelo tem a capacidade de representar bem o comportamento do processo.

Figura 4.14 – Sinal de deslocamento para validação do modelo ajustado



4.6. CONCLUSÃO

Neste capítulo, foram apresentadas a técnica de estimação dos mínimos quadrados e a técnica de estimação dos mínimos quadrados recursivos. A metodologia utilizada no *retrofitting* (readequação) de um eixo de uma mesa de posicionamento de uma máquina de eletroerosão também foi apresentada, seguida da estimação de seus parâmetros pela técnica dos mínimos quadrados recursivos. A partir dos parâmetros estimados obteve-se um modelo e fez-se sua sintonia, o que resultou na função de transferência que representa o sistema do eixo da mesa XY juntamente com os sistemas de acionamento e medição. Concluiu-se com a validação desta função de transferência, utilizando-se dados adquiridos não usados na estimação.

CAPÍTULO

05 Conclusões finais

Neste trabalho apresentou-se um modelo matemático dinâmico de quinta ordem para representar um eixo da mesa XY, a qual engloba tanto a estrutura de acionamento elétrico quanto a estrutura mecânica. Este modelo foi originado na forma de equação diferencial e rearranjado na forma de função de transferência e espaço de estado.

Projetou-se controladores convencionais do tipo proporcional, proporcional-derivativo, proporcional-integral e proporcional-integral-derivativo com base no critério da estabilidade de Routh e no máximo valor da tensão de alimentação do motor cc, além das especificações de desempenho que deveriam ser obedecidas. O controle via imposição de pólos não pôde ser concluído, devido ao sistema não se apresentar a estados completamente controláveis.

Os controladores projetados foram avaliados através de simulação. As especificações de projeto analisadas foram a resposta transiente do sistema, o erro de posição em regime permanente e as características de margem de fase e margem de ganho. Todos os controladores obedeceram às especificações de desempenho exigidas, mas pode-se verificar na Tabela 3.6, que o melhor desempenho foi obtido pelo controlador proporcional-integral-derivativo. Este sistema de controle resultou no menor tempo de acomodação em relação aos outros sistemas.

Sabendo-se que em alguns sistemas, mesmo com o conhecimento prévio de um modelo matemático que retrate aproximadamente o seu comportamento dinâmico, é praticamente impossível obter-se valores de alguns parâmetros de forma direta. Nesses casos, propõe-se recorrer à técnica de estimação de parâmetros, que objetivam a determinação dos valores desconhecidos dos parâmetros do sistema a partir dos sinais de entrada e de saída da planta. Neste trabalho, utilizou-se a técnica de estimação por mínimos quadrados recursivo para estimação dos parâmetros de um eixo de uma mesa posicionadora de uma máquina de eletroerosão convencional, a qual, partiu-se do pressuposto, que não se conhecia nenhum parâmetro elétrico ou mecânico do sistema. Depois de realizar-se o *retrofitting* (readequação) no equipamento, tornando possíveis o acionamento e a monitoração do processo por meio do computador, a técnica de estimação por mínimos quadrados recursivo foi aplicada, resultando em um modelo, que, após a realização de ajuste e validação, representa bem o sistema do eixo da mesa XY da máquina de eletroerosão juntamente com o sistema de acionamento e de medição, adicionados à máquina durante o processo de *retrofitting*.

O processo de estimação recursiva, implementado em tempo real representa uma técnica fundamental para o desenvolvimento futuro de controladores adaptativos para o sistema do eixo da mesa XY.

Como sugestões para trabalhos futuros tem-se:

- Melhorar o sistema de aquisição de sinais com o objetivo de diminuir o tempo de amostragem.
- Substituir o sistema de medição por um sistema do mesmo tipo com uma resolução menor;
- Avaliar outros tipos estimadores recursivos para o estudo comparativo;
- Avaliação de técnicas adaptativas em mesa XY utilizando o algoritmo de estimação de mínimos quadrados recursivo proposto neste trabalho;
- Fazer uma caracterização metrológica da mesa XY;

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] Aguire, L.A., 2000, "Introdução à Identificação de Sistemas: Técnicas Lineares e Não-Lineares Aplicadas a Sistemas Reais", Ed. UFMG, Belo Horizonte, Brasil, 554 p.

[2] Brenes, L.A.R., 1994, "Modernização e Análise Dinâmica de uma Máquina-Ferramenta NC", Dissertação de Mestrado, UFSC, Santa Catarina, Brasil, 104 p.

[3] Capelli, A., 2002, "Controle de Movimento", Saber Eletrônica, n. 357, pp. 2-8.

[4] Chang, S.B., Wu, S.H., Hu, Y.C., 1997. "Submicrometer Overshoot Control of Rapid and Precise Positioning", Precision Engineering, Vol. 20, pp. 161-170.

[5] Chen, C., 1999, "Linear system theory and design", Oxford University Press, New York, 3ª edition.

[6] Garcia, C., 1997, "Modelagem e Simulação", Ed. EDUSP, São Paulo, Brasil, 458 p.

[7] Jesus, G.A.R., 1999, "Uma Contribuição para o Desenvolvimento e Controle de Sistemas de Posicionamento Submicrométricos", Tese de Doutorado, UFSC, Santa Catarina, Brasil, 194 p.

[8] Lacerda, H.B., 1998, "Um Controlador de Erros de Contorno para Máquinas CNC de Alta Velocidade", Tese de Doutorado, EESC-USP, São Carlos, Brasil, 151 p.

[9]

[10] Larsen, G.A., Cetinkunt, S., Donmez, A., 1995, "CMAC Neural Network Control for High Precision Motion Control in the Presence of Large Friction", Transactions of the ASME, Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control, Vol. 117, pp. 415-420.

[11] Lima, W.C., 1983, "Servomotores: Aplicações", Ed. UFSC, Santa Catarina, Brasil, 68 p.

[12] Mariano, V., 2003, "Exame de Qualificação ao Doutorado: Estratégia de Identificação de Parâmetros e Controle Adaptativo de Mesa XY", Curso de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, UFPB, 2003.

[13] Mariano, V., Silva, J.F., Silva, J.B.A., Nascimento, J.F.L., Silva, J.C.B., 2003a, "Parametric, Modal and External Excitation Identification of Machine-Tool XY Table Using Recursive Estimators", 17th COBEM, São Paulo/SP, Brasil.

[14] Mariano, V., Silva, J.F., Silva, J.B.A., Nascimento, J.F.L., Silva, J.C.B., 2003b, "Performance de Sinais de Excitação na Estimação Recursiva de Parâmetros de uma Mesa XY de Máquina-Ferramenta", XXIV CILANCE, Ouro Preto/MG, Brasil.

[15] Mei, X., Tsutsumi, M., Yamazaki, T., Sun, N., 2001, "Study of the Friction Error for a High-Speed Precision Table", International Journal of Machine Tools and Manufacture, Vol. 41, pp. 1405-1415.

[16] Ogata, K., 1998, "Engenharia de Controle Moderno", Editora Prentice-Hall do Brasil, 3ª edição, 813 p.

[17] Pansiera, P. E.,2002, "A Ciência do Retrofitting". Mecatrônica Atual**,** São Paulo, ano 1, n. 2, p.41-43

[18] Pazos, F., 2002, "Automação de sistemas & Robótica", Axcel Books do Brasil Editora, Rio de Janeiro, Brasil, 377 p.

[19] Phillips, C.L., Harbor, R.D., 1996, "Sistemas de Controle e Realimentação", MAKRON Books do Brasil Editora, São Paulo, Brasil, 558 p.

[20] Poel, C. J. v.d.F., 2000, "Aplicação e avaliação de técnicas de controle clássico e do controle via imposição de pólos em um sistema hidráulico", Dissertação de Mestrado, UFPB, Paraíba, Brasil, 140 p.

[21] Rao, S. G., Ro, P.I., 1995, "Submicrometer control of a traction drive using state feedback and estimation", Precision Engineering, Vol. 17, pp. 124-130.

[22] Riul, J.A., 2000, "Controladores Neurais e Híbrido Aplicados em uma Carga Acionada por um Atuador Hidráulico", Tese de Doutorado, UFPB, Paraíba, Brasil, 171 p.

[23] Shigley, J.E., Mischke, C.R., 1989, "Machanical Engineering Design", McGRAW-HILL International Editions, 5ª edition, 779 p.

[24] Silva, J.C.B., Silva, J.F., Mariano, V., Nascimento, J.F.L., Garcia, A.F., 2003, "Análise Dinâmica e Estimação de Parâmetros para uso de Técnicas de Controle Adaptativo Aplicado em um Sistema Mecânico", XXIV CILANCE, Ouro Preto/MG, Brasil.

[25] Smith, M.H., Annnaswamy, A.M., Slocum, A.H., 1995, "Adaptive Control Strategies for a Precision Machine Tool Axis", Precision Engineering, Vol. 17, pp. 192-206.

[26] Tomizuka, M., Hu, J., Chiu, T., Kamano, T., 1992, "Synchronization of Two Motion Control Axes Under Adaptive Feedforward control", Transactions of the ASME, Journal of Dynamic Sytems, Measurement, and Control, Vol. 114, pp. 196-203.

[27] Tung, E.D., Tomizuka, M., Urushisaki, Y., 1996, "High-Speed End Milling Using a Feedforward Control Architecture", Journal of Manufacturing Science and Engineering, Vol. 118, pp. 178-187.

[28] Wada, R., 1997, "Há de Haver um Conceito bem Diferente do Atual para as Máquinas de Amanhã", Máquina e Metais, maio, pp. 20-43.

[29] Weck, M., 1984, "Handbook of Machine Tools: Automation and Controls", Vol. 3, John Wiley and Sons, 450 p.

[30] Younkin, G.W., 1991, "Modeling Machine Tool Feed Servo Drives Using Simulation Techniques to Predict Performance", IEEE Transactions on Industry Applications, Vol. 27, No. 2, pp. 268-274.

APÊNDICE

PROGRAMA ELABORADO EM AMBIENTE MATLAB PARA ESTIMAÇÃO DE PARÂMETROS DE UM EIXO DA MESA XY PELA TÉCNICA DE ESTIMAÇÃO DE MÍNIMOS QUADRADOS RECURSIVO

```
% PROGRAMA ESTIMADOR DE MÍNIMOS QUADRADOS RECURSIVO

close all

%.....DADOS DE ENTRADA.....

P=1.e5*eye(7);

TETAest=[0.;0.;0.;0.;0.;0.;0.];

nunpe=893

w=length(y);

ye=y(1:nunpe);

ue=u(1:nunpe);

FI=[0.; 0.; 0.; 0.; 0.; 0.; 0.];

t=5; T=1:w;

Ts=0.03;

tt=Ts*(w-1);ts=0:Ts:tt;ts=ts';

lambda=1;

%..... MEMORIAL DE CÁLCULO.....

while t <= nunpe

  ye(t)=ye(t);            % DADOS EXPERIMENTAIS

  K=(P*FI)*inv(FI'*P*FI+lambda);

  neta=ye(t)-(FI'*TETAest);

  TETAest=TETAest+K*neta;

  TETAest1(t)=TETAest(1,1);
```

```
  TETAest2(t)=TETAest(2,1);
  TETAest3(t)=TETAest(3,1);
  TETAest4(t)=TETAest(4,1);
  TETAest5(t)=TETAest(5,1);
  TETAest6(t)=TETAest(6,1);
  TETAest7(t)=TETAest(7,1);
  P=(P-(K*FI'*P));
  erro(t)=ye(t)-(FI'*TETAest);
  ytest(t)=(FI'*TETAest);    % FUNÇAO ESTIMADA
  t=t+1;
  if t > w break; end;
  FI=[-ye(t-1); -ye(t-2); -ye(t-3); -ye(t-4); -ye(t-5); ue(t-4); ue(t-5);];
end
%.....FUNÇAO DE TRANSFERENCIA.....
 Kk=0.945; %Ganho de Ajuste
 num=Kk*[0 0 0 0 TETAest6(nunpe)*Ts TETAest6(nunpe)+TETAest7(nunpe)];
den=[Ts^5 Ts^4*(5+TETAest1(nunpe)) Ts^3*(10+4*TETAest1(nunpe)+TETAest2(nunpe))
Ts^2*(10+6*TETAest1(nunpe)+3*TETAest2(nunpe)+TETAest3(nunpe))
Ts*(5+4*TETAest1(nunpe)+3*TETAest2(nunpe)+2*TETAest3(nunpe)+TETAest4(nunpe))
1+TETAest1(nunpe)+TETAest2(nunpe)+TETAest3(nunpe)+TETAest4(nunpe)+TETAest5(nunpe)]
 sys=tf(num,den);
%.....SAÍDA GRÁFICA.....
figure(1)
plot(ts(1:nunpe),TETAest1,'b',ts(1:nunpe),TETAest2,'g',ts(1:nunpe),TETAest3,'r',ts(1:nunpe),T
ETAest4,'c');
```

```
title('Parametros Estimados')

xlabel('Tempo em segundos')

legend('a1','a2','a3','a4')

grid on

figure(2)

plot(ts(1:nunpe),TETAest5,'m',ts(1:nunpe),TETAest6,'b',ts(1:nunpe),TETAest7,'k');

title('Parametros Estimados')

xlabel('Tempo em segundos')

legend('a5','b1','b2')

grid on

figure(3)

uv1=u(1:nunpe);

kk=lsim(sys,uv1,ts(1:nunpe));

plot(ts(1:nunpe),kk,'r',ts(1:nunpe),y(1:nunpe),'b');

xlabel('Tempo em segundos');

ylabel('Deslocamento em mm')

legend('Resposta simulada com ganho de 0,945','Resposta experimental')
```

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1 – Erros axiais e erro de contorno.....14
Figura 1.2 – Diagrama de blocos do sistema de controle de uma mesa XY.....14
Figura 2.1 – Modelo matemático simplificado de um sistema.....16
Figura 2.2 – Etapas para obtenção de um modelo dinâmico.....19
Figura 2.3 – Eixo da Mesa XY.....19
Figura 2.4 – Esquemático de um motor CC.....20
Figura 2.5 – Modelo idealizado de um eixo da mesa de posicionamento XY.....23
Figura 2.6 – Diagrama de corpos livres do sistema idealizado para um eixo da mesa de posicionamento XY 24
Figura 2.7 – Esquema simplificado de um fuso.....25
Figura 2.8 – Elementos de um diagrama de blocos.....27
Figura 2.9 – (a) Diagrama de blocos representando a equação 2.23; (b) Diagrama de blocos representando a equação 2.24; (c) Diagrama de blocos representando a equação 2.25; (d) Diagrama de blocos representando a equação 2.26.....28
Figura 2.10 – Diagrama de blocos para um dos eixos da mesa XY 28
Figura 2.11 – (a) - (d) Redução sucessiva do diagrama de blocos apresentado na figura 2.10 30
Figura 2.12 – Diagrama de blocos do sistema representado por espaço de estados.....32
Figura 2.13 – Pólos do sistema.....33
Figura 2.14 – Resposta do sistema em malha aberta a uma excitação do tipo degrau.....34
Figura 3.1 – Sistema de controle em malha fechada com compensador em série.....35
Figura 3.2 – Diagrama de blocos de um sistema com controlador proporcional.....37
Figura 3.3 – Resposta y(t) do sistema com o controlador proporcional a uma entrada degrau.....41
Figura 3.4 – Variável de controle u(t) do sistema com o controlador P.....41
Figura 3.5 – (a) Lugar das raízes do sistema com controlador P; (b) Ampliação da Figura 3.5(a).....42
Figura 3.6 – Diagrama de Bode do sistema com controlador P.....42
Figura 3.7 – Diagrama de blocos de um sistema com controlador proporcional-derivativo 44
Figura 3.8 – Resposta y(t) do sistema com o controlador PD a uma entrada degrau.....46
Figura 3.9 – Variável de controle u(t) do sistema com o controlador PD.....46
Figura 3.10 – Lugar das raízes do sistema com controlador PD.....47
Figura 3.11 – Ampliação da Figura 3.10.....47
Figura 3.12 – Diagrama de Bode do sistema com controlador PD.....48

Figura 3.13 – Diagrama de blocos de um sistema com controlador proporcional-integral 49
Figura 3.14 – Resposta y(t) do sistema com o controlador PI a uma entrada degrau.....51
Figura 3.15 – Variável de controle u(t) do sistema com o controlador PI.....51
Figura 3.16 – Lugar das raízes do sistema com controlador PI.....52
Figura 3.17 – Ampliação da Figura 3.16.....52
Figura 3.18 – Diagrama de Bode do sistema com controlador PI.....53
Figura 3.19 – Diagrama de blocos de um sistema com controlador PID 54
Figura 3.20 – Resposta y(t) do sistema com o controlador PID a uma entrada degrau.....57
Figura 3.21 – Variável de controle u(t) do sistema com o controlador PID.....57
Figura 3.22 – Lugar das raízes do sistema com controlador PID.....58
Figura 3.23 – Ampliação da Figura 3.22.....58
Figura 3.24 – Diagrama de Bode do sistema com controlador PID.....59
Figura 3.25– Diagrama de blocos de uma equação de espaço de estados com realimentação de estados 60
Figura 3.26 – Resposta y(t) do sistema com todos os controladores 65
Figura 4.1 – (a) Mesa de coordenadas XY; (b) Mesa de coordenadas XY desmontada.....72
Figura 4.2 – Elementos do *encoder*.....73
Figura 4.3 – Formas de onda de um *encoder*.....74
Figura 4.4 – (a) *Encoder* incremental; (b) *Encoder* absoluto.....74
Figura 4.5 – Escala óptica.....75
Figura 4.6 – Esquemático da bancada experimental.....76
Figura 4.7 – Tela principal do programa em ambiente *LabView* para obtenção dos dados experimentais.....77
Figura 4.8 – Dados de entrada e saída do sistema de um eixo de uma mesa XY.....77
Figura 4.9 – Parâmetros estimados: a_1, a_2, a_3 e a_4 79
Figura 4.10 – Parâmetros estimados: a_5, b_1, e b_2 80
Figura 4.11 – Sinal do deslocamento medido experimentalmente e simulado a partir do modelo estimado 81
Figura 4.12 – Sinal do deslocamento medido experimentalmente e simulado a partir do modelo ajustado 81
Figura 4.13 – Sinais de entrada do sistema utilizados para estimação e validação do modelo.....82
Figura 4.14 – Sinal de deslocamento para validação do modelo ajustado.....83

LISTA DE TABELAS

TABELA 2.1 – Valores dos parâmetros usados no modelo.....32

TABELA 3.1 – Arranjo dos coeficientes da equação característica para análise da estabilidade pelo critério de Routh.....49

TABELA 3.2 – Coeficientes da equação característica do sistema para análise da estabilidade pelo critério de *Routh* no projeto de um controlador P.....40

TABELA 3.3 – Coeficientes da equação característica do sistema para análise da estabilidade pelo critério de *Routh* no projeto de um controlador PD.....45

TABELA 3.4 – Coeficientes da equação característica do sistema para análise da estabilidade pelo critério de *Routh* no projeto de um controlador PI.....50

TABELA 3.5 – Coeficientes da equação característica do sistema para análise da estabilidade pelo critério de *Routh* no projeto de um controlador PID.....55

TABELA 3.6 – Resultados para o sistema de um dos eixos da mesa XY com os controladores projetados utilizando uma referencia degrau de amplitude 0,1m 64

TABELA 4.1 – Parâmetros estimados pela técnica dos mínimos quadrados recursivo para um eixo da mesa XY.....80

LISTA DE SÍMBOLOS

β — Ângulo do filete da rosca em relação à vertical [deg]

ϕ — Fluxo do motor [webers]

μ — Coeficiente de atrito entre os filetes da rosca

$\Theta_1(s)$ — Transformada de Laplace de $\theta_1(t)$

$\Theta_2(s)$ — Transformada de Laplace de $\theta_2(t)$

$\boldsymbol{\theta}$ — Matriz de parâmetros estimados

θ_1 — Deslocamento angular do rotor do motor [rad]

θ_2 — Deslocamento angular do fuso [rad]

$\hat{\theta}_{MQ}$ — Estimador por mínimos quadrados

θ_m — Deslocamento do eixo do motor [rad]

$\hat{\theta}_{RMQ}$ — Estimador por mínimos quadrados recursivo

η — Erro na predição do sinal y(k)

σ — Parte real do pólo complexo

ω — Parte imaginária dos pólos complexos

ω_1 — Velocidade angular do rotor do motor [rad/s]

ω_2 — Velocidade angular do fuso [rad/s]

ω_m — Rotação do eixo do motor [rad/s]

ω_n — Frequência natural [rad/s]

ξ — Erro do valor estimado

$\psi(k-1)$ — Vetor de regressores formado na interação k

ζ — Fator de amortecimento

$\mathbf{A}$ — Matriz de estados

a — Coeficiente da equação característica ou coeficiente estimado

B — Amortecimento resistente no conjunto [N.s/m]

$\mathbf{B}$ — Matriz de entrada

B_m — Coeficiente de atrito viscoso nos mancais do motor [N.m.s/rad]

b — coeficiente estimado

$\mathbf{C}$ — Matriz de Saída

d_e — Diâmetro efetivo da rosca [m]

E(s) — Transformada de Laplace de e(t)

e — Sinal de erro [m]

e_{ssp} — erro de posição [m]

f — Força aplicada à porca [N]

$G_c(s)$ — Função transferência do compensador

$G_p(s)$ — Função de transferência da planta

$H(s)$ — Função de transferência do ramo de realimentação do sistema

$I_a(s)$ — Transformada de Laplace de $i_a(t)$

i_a — Corrente de armadura do motor [A]

i_f — Corrente de campo do motor [A]

I_1 — Soma da inércia do motor e do fuso [kg.m^2]

I_2 — Inércia equivalente da mesa [kg.m^2]

I_m — Momento de inércia do rotor do motor [kg.m^2]

K — Matriz de ganho de realimentação de estados

K — Coeficiente de rigidez equivalente do sistema [N.m]

K_d — Ganho derivativo

K_1 — Constante do motor [N.m/webers.A]

K_i — Ganho integral

K_b — Constante do motor [v.s/rad]

K_f — Constante do campo do motor [webers/A]

K_m — Constante de torque do motor[N.m/A]

K_p — Ganho proporcional

K_x — Ganho do amplificador de potência

L_a — Indutância do enrolamento da armadura do motor [H]

L_f — Indutância do enrolamento de campo do motor [H]

ℓ — Passo angular [m/rad]

M — Matriz de controlabilidade

M_p — Sobre-sinal [%]

MF — Margem de Fase [deg]

MG — Margem de Ganho [dB]

N_p — Número de pulsos contados pela escala óptica

p — Passo do fuso [m] ou pólos do sistema

R_a — Resistência do enrolamento da armadura do motor [Ω]

R_{eo} — Resolução da escala óptica [mm]

R_f — Resistência do enrolamento de campo do motor [Ω]

T — Matriz de transformação

T_a — Período de amostragem [ms]

T_B — Torque resistivo devido ao amortecimento do sistema [N.m]

T_d — Torque externo [N.m]

T_I — Torque resistivo devido à inércia do sistema [N.m]

T_K — Torque resistivo devido à rigidez do sistema [N.m]

T_L — Torque necessário para deslocar o eixo da mesa XY [N.m]

T_m — Torque do motor [N.m]

T_s — Tempo de acomodação [s]

t — Tempo [s]

u — Variável de controle [V]

$V_a(s)$ — Transformada de Laplace de V_a (t)

V_a — Tensão na armadura do motor [V]

V_b — Força contra-eletromotriz [V]

V_f — Tensão no campo do motor [V]

X(s) — Transformada de Laplace de x(t)

x — Deslocamento axial do eixo da mesa XY [m]

Y(s) — Transformada de Laplace de y(t)

$Y_r(s)$ — Transformada de Laplace de $y_r(t)$

y — Saída do sistema de controle

y_r — Entrada de referência [m]

www.poisson.com.br
contato@poisson.com.br

@editorapoisson

https://www.facebook.com/editorapoisson